

Нижегородский государственный университет  
им. Н.И.Лобачевского

Национальный исследовательский университет

Учебно-научный и инновационный комплекс  
"Новые многофункциональные материалы и нанотехнологии"

Д.В. Хомицкий  
А.С. Гаревский  
А.В. Тележников

## **Сборник задач по линейной алгебре (Практикум)**

Мероприятие 1.2. Совершенствование образовательных технологий, укрепление материально-технической базы учебного процесса

*Учебные дисциплины:* «Линейная алгебра», «Численные методы и математическое моделирование», «Вычислительная физика»

*Специальности, направления:* 011200 «Физика», 210100 «Электроника и наноэлектроника», 222900 «Нанотехнология и микросистемная техника», 230400 «Информационные системы и технологии»

ННГУ  
2010

УДК 512.64(076)

ББК В143

X-76

X-76 Хомицкий Д.В., Гаревский А.С., Тележников А.В.  
СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ: Практикум (Учебно-научный и инновационный комплекс "Новые многофункциональные материалы и нанотехнологии" ). – Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2010.– 51 с.

Рецензент: доцент Д.Е. Бурланков

Сборник содержит задачи по общему курсу «Линейная алгебра», читаемому студентам физического факультета ННГУ. Каждый параграф предваряется кратким введением в изучаемый раздел курса, содержащим основные определения, теоремы, а также примеры решения типовых задач. Упражнения, представленные в сборнике, соответствуют темам практических занятий, контрольных работ и экзаменационных билетов.

УДК 512.64(076)

ББК В143

© Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского, 2010

# Глава 1. Матрицы, определители и системы линейных уравнений

Алгебра матриц и систем линейных уравнений представляет собой один из основных инструментов математики, применяющийся в подавляющем большинстве прикладных задач, где действуют линейные закономерности. Особенно важным является аппарат матричного исчисления в квантовой физике, составляющей теоретическую базу современной физики микро- и наноструктур.

## 1. Матрицы

Матрицей  $A$  называется прямоугольная таблица, элементами которой могут быть вещественные или комплексные числа. Если  $A$  состоит из  $m$  строк и  $n$  столбцов, говорят о матрице порядка  $m \times n$ , элементы которой обозначаются  $a_{ij}$ , где  $i = 1, \dots, m$  и  $j = 1, \dots, n$ . Матрицы с равным числом строк и столбцов  $m = n$  называют квадратными матрицами порядка  $n$ . Следом квадратной матрицы называется сумма её диагональных элементов,

обозначаемая как 
$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Операции с матрицами определяются через операции с их элементами. Транспонирование матрицы, или замена местами строк и столбцов:  $(A^T)_{ij} = a_{ji}$ . Умножение матрицы на число  $\alpha$  определяет новую матрицу  $(\alpha A)_{ij} = \alpha a_{ij}$ . Сложение двух матриц возможно лишь для матриц одинакового порядка, в результате  $(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ . Произведение определено для двух матриц с порядками  $m \times n$  и  $n \times p$ , т.е. число столбцов первого сомножителя равно числу

строк второго сомножителя, а элемент произведения есть  $(A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$ .

Отсюда можно определить  $n$ -ю степень квадратной матрицы  $A^n = A \cdot A \cdot \dots \cdot A$  как  $n$ -кратное умножение матрицы на себя. Для различных матриц  $A$  и  $B$  при возможности вычисления  $AB$  и  $BA$  в общем случае  $AB \neq BA$ . Величина  $[AB] = AB - BA$  называется коммутатором матриц  $A$  и  $B$ . Матрицы, для которых  $[AB] = 0$ , называют коммутирующими. Так, всегда коммутируют между собой две диагональные квадратные матрицы одного порядка. При использовании ряда Тейлора для функций возможно вычисление функций от квадратных матриц через соответствующие линейные комбинации, образующие ряд.

Некоторые виды матриц имеет своё собственное обозначение из-за особенностей в структуре расположения своих элементов. Диагональная

матрица имеет ненулевые элементы лишь на главной диагонали, поэтому  $a_{ii} = \lambda_i$ , а все остальные элементы равны нулю. Если все  $\lambda_i = 1$ , то  $A$  является единичной матрицей  $E$  порядка  $n$  с элементами  $E_{ij} = \delta_{ij}$ , где  $\delta_{ij}$ -символ Кронекера. Симметричная матрица обладает свойством  $a_{ij} = a_{ji}$ , а для антисимметричной матрицы, наоборот,  $a_{ij} = -a_{ji}$ . В случае комплексных элементов вводится операция эрмитового сопряжения  $A^+$ , сочетающая транспонирование и комплексное сопряжение:  $(a^+)_{ij} = \bar{a}_{ji}$ , где черта обозначает комплексное сопряжение. Матрицы, обладающие свойством  $A^+ = A$ , называются эрмитовыми. Заметим, что диагональные элементы эрмитовой матрицы всегда вещественны, а класс симметричных матриц является подмножеством эрмитовых матриц с вещественными элементами. По аналогии с антисимметричной матрицей вводятся антиэрмитовы матрицы, обладающие свойством  $a_{ij} = -\bar{a}_{ji}$ .

**Пример 1.** Вычислить произведение матриц  $AB = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ .

**Решение.** Данные матрицы имеют порядки  $1 \times 2$  и  $2 \times 2$ , поэтому их произведение есть матрица  $C$  порядка  $1 \times 2$ . Вычислим её элементы:  $c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1$ ,  $c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1$ , следовательно,  $C = \begin{vmatrix} 1 & 1 \end{vmatrix}$ .

**Пример 2.** Вычислить значение многочлена  $f(A)$  для матрицы

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{vmatrix}, \text{ если } f(x) = x^2 - x.$$

**Решение.** Разложим вначале многочлен на множители, записав  $f(x) = x^2 - x = x(x - 1)$ . Для матричного аргумента это означает, что  $f(A) = A(A - E)$ , где  $E$ - единичная матрица соответствующего порядка. Подставив матрицу  $A$ , данную в условии, получим окончательно

$$f(A) = A(A - E) = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 4 & 3 \\ -2 & 4 & 3 \\ 2 & -4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

**Задачи для самостоятельного решения.**

1.1. Вычислить линейную комбинацию матриц:

$$1) 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad 2) 2 \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{vmatrix}$$

$$3) \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1+i \\ 3 \end{vmatrix} \quad 4) 2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

1.2. 1) Можно ли умножить строку длины  $m$  на столбец высоты  $n$ ?

2) Можно ли умножить столбец высоты  $n$  на строку длины  $m$ ?

1.3. Вычислить произведение матриц, если оно определено:

$$1) \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 3 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{vmatrix} \quad 2) \begin{vmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} \quad 3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

$$4) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad 5) \begin{vmatrix} a & b & \alpha & \beta \\ c & d & \gamma & \delta \end{vmatrix} \quad 6) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$7) \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad 8) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 4 \end{vmatrix}$$

1.4. Вычислить  $n$ -ю степень матриц:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad 3) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \quad 4) \begin{vmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{vmatrix}, \lambda_i - \text{числа}$$

$$5) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad 6) \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}.$$

1.5. Найти  $\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{vmatrix} 1 & \frac{\alpha}{n} \\ -\frac{\alpha}{n} & 1 \end{vmatrix}^n$ , где  $\alpha$  - вещественное число.

1.6. Проверить, являются ли данные матрицы эрмитовыми:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \quad 2) \begin{vmatrix} 1+i & 0 & 1 \\ 0 & 1+i & -1 \\ 1 & -1 & 2-i \end{vmatrix} \quad 3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & -1-2i \\ 1-i & -1+2i & 2 \end{vmatrix}$$

$$4) \left\| \begin{array}{ccc} 1 & e^{i\varphi} & ie^{i\varphi} \\ e^{-i\varphi} & 2 & 0 \\ -ie^{-i\varphi} & 0 & 3 \end{array} \right\|, \text{ где } \varphi - \text{ вещественное число.}$$

1.7. Найти значение многочлена  $f(x)$  от матрицы  $A$ :

$$1) f(x) = x^2 - 2x + 1, \quad A = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right\| \quad 2) f(x) = x^2 - 2x + 1, \quad A = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right\|$$

$$3) f(x) = 3x^2 - 2x + 5, \quad A = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{array} \right\|$$

1.8. Вычислить матрицу  $P = E - (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_k)(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_k)^T$ , где  $\mathbf{e}_i$  –  $i$ -й столбец единичной матрицы  $E$ .

1.9. Выяснить, когда справедливы матричные тождества для двух квадратных матриц  $A$  и  $B$  одинакового порядка,  $E$  – единичная матрица:

$$1) (A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \quad 2) (A + B)(A - B) = (A - B)(A + B)$$

$$3) A^2 - B^2 = (A + B)(A - B) \quad 4) (A + E)^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + E$$

1.10. Доказать, что для двух квадратных матриц  $A$  и  $B$  одинакового порядка выполняется соотношение  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .

1.11. Матрицы  $\sigma_x = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right\|$ ,  $\sigma_y = \left\| \begin{array}{cc} 0 & -i \\ i & 0 \end{array} \right\|$ ,  $\sigma_z = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right\|$  называются матрицами

Паули и играют большую роль в математическом аппарате квантовой механики, в частности, в описании спина электрона. Найти коммутаторы

этих матриц:  $[\sigma_x, \sigma_y]$ ,  $[\sigma_y, \sigma_z]$ ,  $[\sigma_z, \sigma_x]$ .

1.12. Найти функцию от оператора  $A = \frac{1}{1 - \sigma_y / 2}$ , где  $\sigma_y$  есть одна из матриц

Паули, введённых в задаче 1.11.

1.13. Найти явный вид матриц ( $\alpha$  – вещественное число), где матрицы Паули

$\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  определены в задаче 1.11.:

$$1) \exp(i\alpha\sigma_x); \quad 2) \exp(i\alpha\sigma_y); \quad 3) \exp(i\alpha\sigma_z).$$

1.14. Найти коммутатор матриц  $[L_1 L_2]$ , где  $L_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ ,  $L_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{vmatrix}$

## 2. Определители. Ранг матрицы

Определителем, или детерминантом  $\det A$  квадратной матрицы  $A$  порядка  $n$  называется следующая числовая функция от её элементов: для матрицы первого порядка  $\det A = a_{11}$ , для матрицы 2-го порядка  $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ , для матриц 3-го порядка и выше детерминант можно определить по индукции при помощи формулы разложения, или раскрытия по  $i$ -й строке:

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \overline{M}_{ij}, \text{ где } \overline{M}_{ij} \text{ есть дополнительный минор элемента } a_{ij}$$

(черта здесь не обозначает комплексное сопряжение), представляющий собой определитель порядка  $n-1$ , составленный из элементов исходной матрицы  $A$ , из которой вычеркнуты  $i$ -я строка и  $j$ -й столбец. Раскрытие определителя  $\overline{M}_{ij}$  производится аналогично. Матрицы с ненулевым определителем называются невырожденными, или неособыми, а при  $\det A = 0$  матрица, строки (столбцы) которой становятся при этом линейно зависимыми, называется вырожденной, или особой.

Основные свойства определителей при операциях с элементами матрицы: при перестановке столбцов (строк)  $\det A$  меняет знак, при умножении одной строки (столбца) на число весь  $\det A$  умножается на это число. При транспонировании матрицы её определитель не меняется. Определитель также не меняется при операции, когда меняется лишь одна строка (столбец) матрицы, к элементам которой прибавляют элементы другой строки (столбца), умноженные на некоторое число. Действия над элементами матрицы, при которых не изменяется её определитель, называются элементарным преобразованием матрицы. При вычислении определителей справедливы также равенства  $\det(A^n) = (\det A)^n$ ,  $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$  и  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

Минором  $k$ -го порядка прямоугольной матрицы  $A$  называется определитель, составленный из элементов некоторых  $k$  строк и  $k$  столбцов этой матрицы, при этом  $k \leq \min(m, n)$ . Наивысший порядок минора, отличного от нуля, когда все миноры более высоких порядков равны нулю, называется рангом матрицы  $A$  и обозначается  $\text{rang}(A)$ . Любой минор с порядком, равным рангу, называется базисным минором данной матрицы. Строки и столбцы, составляющие базисный минор, называются базисными строками и столбцами, и являются линейно независимыми.

**Пример 1.** Вычислить определитель  $n$ -го порядка:

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & \vdots & 5 \\ 5 & 0 & 5 & \vdots & 5 \\ 5 & 5 & 0 & \vdots & 5 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 5 & 5 & 5 & \vdots & 0 \end{vmatrix}.$$

**Решение.** Используем метод элементарных преобразований. Вычтем первую строку матрицы из всех остальных, при этом определитель не изменится:

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & \vdots & 5 \\ 5 & -5 & 0 & \vdots & 0 \\ 5 & 5 & -5 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 5 & 5 & 5 & \vdots & -5 \end{vmatrix}.$$

Полученный детерминант есть определитель

верхней треугольной матрицы, который равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали, т.е.  $D_n = 5 \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot \dots \cdot (-5) = (-1)^{n-1} \cdot 5^n$ .

**Пример 2.** Показать, что определитель эрмитовой матрицы всегда является вещественным числом.

**Решение.** Эрмитова матрица обладает свойством  $A = \overline{A}^T$ , кроме того, определитель любой квадратной матрицы не меняется при транспонировании,  $\det A = \det A^T$ , а комплексное сопряжение элементов матрицы приводит к комплексному сопряжению всего определителя,  $\det(\overline{A}) = \overline{\det A}$ . Комбинируя все эти свойства, мы получаем, что для эрмитовой матрицы  $\overline{\det A} = \det(\overline{A}) = \det A^T = \det A$ , т.е. число, равное  $\det A$ , является вещественным.



### Задачи для самостоятельного решения.

2.1. Вычислить определитель, используя элементарные преобразования матрицы:

$$1) \begin{vmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}.$$

2.2. Вычислить определитель 3-го порядка, где  $\alpha, \beta, \gamma$  – вещественные числа:

$$\begin{vmatrix} 2 & \sin^2 \alpha & -\cos^2 \alpha \\ 2 & \sin^2 \beta & -\cos^2 \beta \\ 2 & \sin^2 \gamma & -\cos^2 \gamma \end{vmatrix}$$

2.3. Доказать, что 
$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

2.4. Вычислить 
$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & (\alpha+1)^2 & (\alpha+2)^2 & (\alpha+3)^2 \\ \beta^2 & (\beta+1)^2 & (\beta+2)^2 & (\beta+3)^2 \\ \gamma^2 & (\gamma+1)^2 & (\gamma+2)^2 & (\gamma+3)^2 \\ \delta^2 & (\delta+1)^2 & (\delta+2)^2 & (\delta+3)^2 \end{vmatrix}.$$

2.5. Решить неравенство относительно  $x$ : 
$$\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$$

2.6. Вычислить определитель 5-го порядка: 
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 16 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 36 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

2.7. Вычислить  $\det A$ , зная, что в матрице  $A$  сумма строк с чётными номерами равна сумме строк с нечётными номерами.

2.8. Найти все комплексные числа, умножение на которые матрицы порядка  $n$  не изменит её определителя.

2.9. 1) Найти число всех миноров  $k$ -го порядка квадратной матрицы порядка  $n$ , содержащихся в фиксированных  $k$  строках.

2) Найти число всех миноров  $k$ -го порядка квадратной матрицы порядка  $n$ .

2.10. Пусть в матрице порядка  $n$  какие-либо  $n$  элементов равны 1, а остальные равны нулю. Чему может быть равен определитель матрицы  $A$ ?

2.11. Найти все числа, умножение на которые квадратной матрицы порядка  $n$  не меняет её определителя.

2.12. Вычислить определитель  $n$ -го порядка:

$$\begin{array}{l}
 1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix} \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & n \end{vmatrix} \quad 3) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 4) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix} \quad 5) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}
 \end{array}$$

2.13. Доказать, что для любой вещественной матрицы  $A$  выполняется неравенство  $\det(AA^T) \geq 0$ .

2.14. Вычислить определитель Вандермонда  $W(x_1, \dots, x_n)$ , где  $x_1, \dots, x_n$  – переменные:

$$W(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

2.15. Найти ранг и указать базисный минор матрицы:

$$\begin{array}{l}
 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad 2) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & -4 \\ 4 & 6 & 14 \end{vmatrix} \quad 3) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{vmatrix}
 \end{array}$$

$$4) \begin{vmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{vmatrix} \qquad 5) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

2.16. Пусть  $\mathbf{a}^T = (a_1, \dots, a_n)$  - строка и  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)^T$  - столбец.

- 1) Вычислить ранг матрицы  $A = \mathbf{b}\mathbf{a}^T$ .
- 2) Пусть  $\text{rang} A = 1$ . Показать, что  $A$  можно представить как произведение некоторого столбца на некоторую строку.

### 3. Обратная матрица. Матричные уравнения

Для невырожденной квадратной матрицы  $A$  можно ввести понятие обратной матрицы  $A^{-1}$ , удовлетворяющей равенству  $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ . Элементы обратной матрицы  $a_{ij}^{-1}$  находятся по формуле  $a_{ij}^{-1} = (-1)^{i+j} \overline{M}_{ji} / \det A$ . Из определения обратной матрицы следует, что  $\det(A^{-1}) = 1/\det A$ . При решении матричных уравнений вида  $AX = B$  решение находится в виде  $X = A^{-1}B$ , где  $A^{-1}$  есть обратная матрица к матрице  $A$ .

**Пример 1.** Найти обратную матрицу для матрицы  $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ .

**Решение.** Вначале вычисляем определитель матрицы, который в данном случае равен двум. Следовательно, матрица не вырождена и имеет обратную. Далее

запишем транспонированную матрицу  $A^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ , затем составим

матрицу из алгебраических дополнений матрицы  $A^T$  и умножим полученную матрицу на число, равное  $1/\det A$ . В результате получаем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \text{ окончательно имеющую вид } A^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3.5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{vmatrix}.$$

Выполним проверку, вычислив произведение  $AA^{-1}$ , в результате получив единичную матрицу.

**Пример 2.** Найти матрицу  $X$  из уравнения  $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} X = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ .

**Решение.** Уравнение имеет вид  $AX = B$ , откуда  $X = A^{-1}B$ . Находим обратную матрицу для матрицы  $A$ , для которой имеем  $A^{-1} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ .

Вычисляя произведение  $X = A^{-1}B$ , получаем ответ  $X = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ . Выполним

проверку, подставив найденную матрицу  $X$  в исходное уравнение. После вычисления произведения  $AX$  получается матрица, равная матрице  $B$  в правой части уравнения.

### Задачи для самостоятельного решения.

3.1. Найти обратную матрицу для матрицы  $A$  поворота в плоскости  $(xy)$  на

$$\text{угол } \varphi, A = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}.$$

3.2. Найти обратную матрицу для следующих матриц 3-го порядка:

$$1) A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad 2) A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

3.3. Пусть матрица  $A$  удовлетворяет уравнению  $A^2 + A + E = O$ , где  $E$  - единичная, а  $O$  - нулевая матрицы. Доказать, что  $A^{-1}$  существует и найти её.

3.4. Пусть матрицы  $A$  и  $B$  коммутируют, т.е.  $AB = BA$ , и имеют обратные. Доказать, что в этом случае выполняется  $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

3.5. Пусть матрицы  $A$  и  $C$  не вырождены. Решить матричные уравнения и выразить неизвестную матрицу  $X$ :

$$\begin{array}{lll} 1) AX = O & 2) AX = B & 3) XA = B \\ 4) AXC = B & 5) A(X + C) = B & \end{array}$$

3.6. Найти обратную матрицу для матрицы  $A = E - \lambda I$ , где  $E$  – единичная матрица,  $I$  – квадратная матрица такая, что  $I^2 = E$ ,  $\lambda$  – число, причём  $|\lambda| < 1$ .

3.7. Найти матрицу  $X$  из уравнения:

$$\begin{aligned}
 1) \quad X \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & 2) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} X &= X \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & 3) \quad X^{-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} X &= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\
 4) \quad X \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 10 & 3 & 3 \end{vmatrix} & 5) \quad \begin{vmatrix} 5 & -6 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \end{vmatrix} X &= \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} \\
 6) \quad X \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & -1 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

3.8. Показать, что определитель унитарной матрицы  $U$  с комплексными элементами, обладающей свойством  $U^{-1} = U^+$ , является комплексным числом, модуль которого равен единице.

#### 4. Системы линейных уравнений крамеровского типа

Системой  $m$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными называется система  $m$  равенств, записываемая в матричном виде как  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , где вектор-столбец  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$  есть набор неизвестных, вектор  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)^T$  называется столбцом свободных членов, а коэффициенты матрицы  $A$  порядка  $m \times n$  являются коэффициентами при неизвестных. Если  $m = n$  и  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ , то система называется системой крамеровского типа. Она имеет единственное решение при условии  $\det A \neq 0$  и не имеет решений при  $\det A = 0$ . В случае  $\det A \neq 0$  её единственной решение находится по формулам Крамера:  $x_j = \Delta_j / \Delta$ , где  $\Delta = \det A$ , а  $\Delta_j$  есть определители, полученные заменой  $j$ -го столбца  $A$  на столбец свободных членов. Системы линейных уравнений можно также решать методом последовательного исключения неизвестных, или методом Гаусса.

**Пример 1.** Решить систему линейных уравнений третьего порядка, используя

формулы Крамера: 
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3. \\ x_1 + x_3 = 3 \end{cases}$$

**Решение.** Прежде всего, вычислим определитель системы  $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$ .

Поскольку  $\Delta \neq 0$ , система имеет единственное решение. Вычисляем

остальные определители:  $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4$ ,  $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2$ , и

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -2$ . Далее по формулам Крамера находим решение системы:

$x_1 = \Delta_1/\Delta = 2$ ,  $x_2 = \Delta_2/\Delta = -1$ ,  $x_3 = \Delta_3/\Delta = 1$ . Подставив найденные значения неизвестных в исходную систему уравнений, убеждаемся, что уравнения превращаются в тождества.

**Пример 2.** . Решить систему линейных уравнений третьего порядка, используя

формулы Крамера: 
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = -4 \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

**Решение.** Вычислим определитель системы  $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 4 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 0$ . Поскольку

$\Delta = 0$ , а система является неоднородной, имея ненулевой столбец свободных членов, то решения не существует. Система является несовместной.

### Задачи для самостоятельного решения.

4.1. Решить систему линейных уравнений третьего порядка по формулам Крамера:

$$1) \begin{cases} x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 6 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = -4 \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

4.2. Найти коэффициенты квадратичного многочлена  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , зная, что  $f(1) = -1$ ,  $f(-1) = 9$  и  $f(2) = -3$ .

4.3. Решить систему четвертого порядка, используя формулы Крамера либо метод исключения неизвестных:

$$1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 = -7 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 9 \\ x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 6x_4 = -7 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 3 \\ 5x_1 - 8x_2 + 4x_3 + 2x_4 = -8 \end{cases}$$

4.4. Найти коэффициенты многочлена третьей степени  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , для которого  $f(-1) = 0$ ,  $f(1) = 4$ ,  $f(2) = 3$  и  $f(3) = 16$ .

## 5. Системы однородных линейных уравнений

При нулевом столбце свободных членов  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$  система линейных уравнений  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  называется однородной. Однородная система всегда совместна, поскольку нулевое решение  $\mathbf{x} = (0, 0, \dots, 0)^T$  обращает все уравнения системы в тождества. В случае квадратной матрицы  $A$  при  $\det A \neq 0$  по формулам Крамера для неё существует лишь тривиальное решение  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Таким образом, условием наличия нетривиального решения однородной системы с квадратной матрицей является равенство нулю её определителя. В общем случае прямоугольной матрицы  $m \times n$  системы её решения, т.е.  $n$ -компонентные вектора  $(x_1, \dots, x_n)^T$ , представляют собой множество, являющееся линейным векторным пространством. Число линейно независимых решений, т.е. размерность пространства, равна  $n - r$ , где  $r = \text{rang}(A)$ . Базис в этом пространстве называется фундаментальной системой решений (ФСР).

Для нахождения ФСР в матрице  $A$  выделяют базисные строки и рассматривают лишь уравнения, содержащиеся в этих строках. Далее в них выделяют базисные столбцы, а переменные, не содержащиеся в базисных столбцах, считают свободными и переносят в правую часть. Таких свободных переменных насчитывается  $n - r$  штук. Формируя из них  $n - r$  линейно независимых столбцов высоты  $n - r$ , решают  $n - r$  раз получившуюся систему крамеровского типа, находя ФСР из векторов  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-r}\}$ . Общее решение

$\mathbf{x}_{00}$  однородной системы является линейной комбинацией векторов ФСР и содержит  $n - r$  произвольных постоянных, т.е.  $\mathbf{x}_{00} = \sum_{k=1}^{n-r} C_k \mathbf{e}_k$ .

**Пример 1.** Найти ФСР и записать общее решение системы линейных однородных уравнений: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

**Решение.** Определим вначале ранг матрицы системы  $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ .

Максимальный размер минора в данном случае равен двум. Минор второго порядка, составленный из элементов второго и третьего столбцов, является базисным, поскольку равен  $M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$ , то есть ранг матрицы равен двум.

Число неизвестных равно трём, поэтому число линейно независимых решений есть  $n - r = 1$ . Найдём базис в пространстве решений, т.е. ФСР. Для этого оставим в левой части переменные, коэффициенты при которых составляют базисный минор: 
$$\begin{cases} x_2 + x_3 = -x_1 \\ x_2 - x_3 = -x_1 \end{cases}$$

решаем полученную систему крамеровского типа, находя  $x_2 = -1$  и  $x_3 = 0$ .

Таким образом, ФСР состоит из одного вектора  $\mathbf{e}_1 = (1, -1, 0)^T$ , а общее решение системы содержит одну произвольную постоянную и имеет вид  $\mathbf{x} = C\mathbf{e}_1$ .

**Пример 2.** Пусть столбцы  $\mathbf{e}_1 = (1, -1, 0, 0)^T$  и  $\mathbf{e}_2 = (0, -1, 0, 0)$  являются ФСР некоторой системы однородных линейных уравнений. Из скольких уравнений может состоять эта система?

**Решение.** Число неизвестных можно определить по размерности вектора решений, которая в данном случае равна четырём, т.е.  $n = 4$ . Далее, размерность пространства решений равна числу векторов в ФСР, т.е. в данном случае двум. Следовательно, ранг матрицы системы  $r$  удовлетворяет уравнению  $4 - r = 2$ , откуда  $r = 2$ . Матрица, имеющая ранг  $r = 2$ , должна иметь порядок не менее двух, то есть у неё должно быть не менее двух строк. Кроме того, матрица может иметь ещё строки, не входящие в базисный минор. Но каждая строка матрицы системы представляет одно из её уравнений, поэтому данная система состоит из двух или более уравнений.



## Задачи для самостоятельного решения.

5.1. Найти ФСР и записать общее решение системы линейных однородных уравнений:

$$1) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 5x_1 - 8x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 7x_3 - 11x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 9x_3 - 14x_4 = 0 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ 7x_1 + 7x_2 + 12x_3 = 0 \\ 3x_1 + 16x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$$

5.2. Пусть столбцы  $\mathbf{e}_1 = (1, -1, 0, 0)^T$  и  $\mathbf{e}_2 = (0, -1, 0, 0)$  являются ФСР некоторой системы однородных линейных уравнений. Привести пример такой системы, состоящей из трёх уравнений.

## 6. Системы неоднородных линейных уравнений

Система неоднородных линейных уравнений  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  общего вида, т.е. с прямоугольной матрицей  $A$  порядка  $m \times n$  и ненулевым столбцом свободных членов  $\mathbf{b}$ , в общем случае не является совместной. Для определения совместности необходимо наряду с матрицей системы  $A$  рассмотреть так называемую расширенную матрицу системы  $A^*$ , которая получается из матрицы  $A$  дописыванием справа столбца свободных членов  $\mathbf{b}$  и имеет порядок  $m \times (n + 1)$ . Критерий совместности устанавливает теорема Кронекера-Капелли, гласящая, что система  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  является совместной тогда и только тогда, если  $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*)$ . После того, как совместность установлена, задача решается по аналогии с решением однородной системы. Именно, общее решение неоднородной системы  $\mathbf{X}_{OH}$  находится как сумма некоторого её

частного решения  $\mathbf{X}_{\text{ЧН}}$  и уже найденного общего решения однородной системы  $\mathbf{X}_{\text{ОО}}$ . Для нахождения  $\mathbf{X}_{\text{ЧН}}$  достаточно выполнить описанную в предыдущем параграфе процедуру нахождения  $\mathbf{X}_{\text{ОО}}$ , придав всем  $n-r$  свободным переменным в правой части нулевые значения. Полученная система Крамера типа с неоднородностью  $\mathbf{b}$  определит одно необходимое частное решение  $\mathbf{X}_{\text{ЧН}}$ .

**Пример 1.** Найти общее решение системы уравнений, где  $a$  и  $b$  - произвольные

числа: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 - x_3 = b \end{cases}$$

**Решение.** Прежде всего, найдём ранг матрицы системы  $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$  и ранг

расширенной матрицы  $A^* = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & -1 & b \end{vmatrix}$ . Миноры второго порядка,

содержащиеся во вторых и третьих столбцах обеих матриц, являются ненулевыми, поэтому  $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 2$ , то есть согласно теореме Кронекера-Капелли система является совместной. Общее решение однородной системы было рассмотрено в предыдущем параграфе, где был получен результат  $\mathbf{x}_{\text{ОО}} = C(1, -1, 0)^T$ . Найдём частное решение неоднородной системы. Повторяя решение однородной задачи и оставляя в левой части переменные, отвечающие базисному минору, получаем систему

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = a - x_1 \\ x_2 - x_3 = b - x_1 \end{cases}$$

Найдём какое-либо её решение, например, при  $x_1 = 0$ ,

которое имеет вид  $\mathbf{x}_{\text{ЧН}} = (0, (a+b)/2, (a-b)/2)^T$ . Общее решение неоднородной системы есть сумма  $\mathbf{X}_{\text{ЧН}}$  и  $\mathbf{X}_{\text{ОО}}$ .

**Пример 2.** При каком значении параметра  $\lambda$  система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = \lambda \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases} \quad \text{является совместной?}$$

**Решение.** Составляем матрицу системы  $A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$  и расширенную

матрицу  $A^* = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ . Максимальный размер минора матрицы

$A$ , не равного нулю, равен двум. Базисным минором является, например, определитель, составленный из элементов первых двух строк и последних двух столбцов матрицы  $A$ . Итак,  $\text{rang}(A) = 2$ . Далее, определим такое значение параметра  $\lambda$ , при котором также и  $\text{rang}(A^*) = 2$ , что является критерием совместности системы. Из структуры матрицы  $A^*$  видно, что новый столбец справа не приведёт к увеличению порядка ненулевого минора, если он будет равен соседнему столбцу. Такая ситуация достигается при значении  $\lambda = 1$ , т.е. система будет совместна при  $\lambda = 1$ .

### Задачи для самостоятельного решения.

6.1. Используя теорему Кронекера-Капелли, проверить совместность системы линейных уравнений и найти общие решения совместных систем:

$$1) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12. \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$$

6.2. Найти общее решение системы:

$$1) x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \quad 2) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = -1 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 9x_1 - 6x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x + by + z = 3 \\ x + 2by + z = 4 \end{cases} \quad (a \text{ и } b - \text{ произвольные числа}).$$

6.3. Среди многочленов степени, не превосходящей 2, найти два линейно независимых многочлена  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  таких, что  $f_1(2) = f_2(2) = 3$ .

6.4. При каком значении параметра  $\lambda$  система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \lambda \end{cases} \quad \text{является совместной?}$$

## Глава 2. Линейные пространства

Обобщением трёхмерного векторного пространства из курса аналитической геометрии на случай произвольного числа измерений является общее понятие линейного пространства. Большинство физических задач, изучающих линейные закономерности, имеют дело с объектами из некоторых линейных пространств. Во многих задачах физики рассматриваются линейные пространства, элементами которых являются функции. Такие пространства, как правило, имеют бесконечную размерность и являются предметом изучения функционального анализа либо методов математической физики.

### 7. Определение линейного пространства. Базис и размерность

Линейным пространством  $L$  называется множество объектов произвольной природы  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \dots$ , называемых элементами этого пространства, или векторам, для которых определены операции «сложение» и «умножение на число». Операция сложения « $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ » сопоставляет двум элементам из  $L$  третий элемент, который также должен принадлежать  $L$ . Операция умножения на число « $\lambda \cdot \mathbf{x}$ » сопоставляет элементу  $\mathbf{x} \in L$  и комплексному (либо вещественному) числу  $\lambda$  новый элемент  $\lambda \mathbf{x}$ , также принадлежащий  $L$ . Указанные операции подчиняются набору аксиом, описывающих коммутативный, ассоциативный и дистрибутивный характер операций сложения и умножения. Среди элементов любого линейного пространства можно выделить нулевой элемент  $\mathbf{0}$ , когда  $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ , и для каждого элемента  $\mathbf{x}$  найти противоположный элемент  $-\mathbf{x}$ , удовлетворяющий условию  $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ . Операция умножения на число при любом способе её введения удовлетворяет условию  $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$ .

Система элементов  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$  называется линейно независимой, если

их линейная комбинация  $\sum_{k=1}^n c_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$  лишь при условии, когда все  $c_k$  равны

нулю, в противном случае система называется линейно зависимой. Рассмотрим в данном пространстве  $L$  набор из  $n$  линейно независимых векторов  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ . Если для любого  $\mathbf{x} \in L$  найдётся такой единственный набор

коэффициентов  $(x_1, \dots, x_n)$ , что  $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{e}_k$ , то система  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$

называется базисом линейного пространства  $L$ . Набор чисел  $(x_1, \dots, x_n)$  называется координатами, или компонентами элемента  $\mathbf{x}$  в базисе  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ .

Число элементов в наборе  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ , являющееся максимальным числом линейно независимых элементов в  $L$ , называется размерностью линейного пространства и обозначается  $\dim L$ . В координатном представлении, когда в

данном базисе элементу  $\mathbf{x}$  сопоставляется набор  $(x_1, \dots, x_n)$ , любое линейное пространство размерности  $n$  идентично по своей структуре (изоморфно)  $n$ -мерному векторному пространству  $R_n$ . Стандартным базисом в этом пространстве называется набор элементов  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  с координатами  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ , ...,  $\mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ .

Пусть в данном линейном пространстве  $L$  выбрано два базиса:  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  и  $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n\}$ . Раскладывая элементы второго базиса по первому, получим матричную связь базисов в виде  $\|\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n\| = \|\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\|S$ , где  $S$  есть квадратная матрица порядка  $n$ , называемая матрицей перехода от базиса  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  к базису  $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n\}$ . Отсюда следует, что элементы  $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n\}$  являются линейно независимыми и будут образовывать базис, лишь если матрица перехода  $S$  является невырожденной.

**Пример 1.** Для множества положительных вещественных чисел операции сложения и умножения на вещественное число определены как « $\mathbf{X} + \mathbf{y}$ » =  $xu$  и « $\lambda \mathbf{x}$ » =  $x^\lambda$ . Является ли указанное множество с такими операциями линейным пространством? В случае положительного ответа найти его размерность и указать базис.

**Решение.** Для любых вещественных положительных чисел  $x$ ,  $u$  и  $\lambda$  результат операций  $xu$  и  $x^\lambda$  также является вещественным положительным числом, то есть принадлежит указанному множеству. Непосредственной проверкой убеждаемся, что все аксиомы линейного пространства выполняются. Роль нулевого элемента играет число 1, а роль противоположного элемента для данного  $X$  выполняет число, равное  $1/x$ . Выбрав некоторый ненулевой элемент  $a \neq 1$ , получим, что для любого элемента  $b$  данного множества справедливо представление  $b = Ca = a^C$ , где  $C = \log_a b$ . Таким образом, любые два элемента данного пространства линейно зависимы и, следовательно, его размерность равна единице. Базисом является любой ненулевой элемент, т.е. любое вещественное число  $a \neq 1$ .

**Пример 2.** Выяснить, является ли множество функций, непрерывных на отрезке  $[a, b]$ , линейным пространством с обычными операциями сложения и умножения на число.

**Решение.** Линейная комбинация непрерывных функций также является непрерывной функцией, т.е. принадлежит данному множеству. Непосредственной проверкой убеждаемся, что все аксиомы линейного пространства выполняются. Нулевым элементом данного пространства является функция, тождественно равная нулю, а противоположным элементом

для данной  $f(x)$  будет функция  $-f(x)$ . В пространстве функций можно составить линейную комбинацию из любого числа элементов, не равную тождественно нулю, поэтому данное линейное пространство является бесконечномерным.

### Задачи для самостоятельного решения.

7.1. Для множества вещественных чисел операции сложения и умножения на вещественное число определены как « $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ » =  $\text{tg}(\text{Arctg}(x) + \text{Arctg}(y))$  и « $\lambda \mathbf{x}$ » =  $\text{tg}(\lambda \cdot \text{Arctg}(x))$ . Является ли указанное множество с такими операциями линейным пространством? В случае положительного ответа найти его размерность и указать базис.

7.2. Образуется ли множество прямоугольных матриц порядка  $m \times n$  линейное пространство относительно операций сложения матриц и умножения матрицы на число? В случае положительного ответа найти его размерность и указать базис.

7.3. Выяснить, является ли данное множество функций, заданных на отрезке  $[a, b]$ , линейным пространством.

1) Непрерывно дифференцируемых на данном отрезке.

2) Интегрируемых на данном отрезке.

3) Ограниченных на данном отрезке.

4) Функций, для которых  $\sup_{[a,b]} f(x) \leq 1$ .

5) Неотрицательных на данном отрезке.

6) Равных нулю при  $x = a$ .

7) Равных единице при  $x = a$ .

8) Функций, для которых  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty$ .

9) Монотонно возрастающих на  $[a, b]$ .

10) Монотонных на  $[a, b]$ .

7.4. Найти матрицу преобразования от базиса  $\mathbf{x}_1 = (1, 0)$ ,  $\mathbf{x}_2 = (0, 1)$  к базису  $\mathbf{x}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ ,  $\mathbf{x}_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$ .

7.5. В пространстве  $R_3$  даны два базиса  $\{\mathbf{e}\}$  и  $\{\mathbf{f}\}$  с координатами базисных векторов в стандартном базисе  $\mathbf{e}_1 = (1, 1, 1)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (2, 1, 1)$ ,  $\mathbf{e}_3 = (1, 1, 3)$  и  $\mathbf{f}_1 = (0, 1, 1)$ ,  $\mathbf{f}_2 = (1, 0, 1)$ ,  $\mathbf{f}_3 = (1, 0, 2)$ .

1) Найти матрицу перехода  $S$  от базиса  $\{\mathbf{e}\}$  к базису  $\{\mathbf{f}\}$ .

2) Найти матрицу обратного перехода.

3) Найти координаты элемента  $\mathbf{e}_1$  в обоих базисах.

4) Найти координаты  $X^e$  элемента  $\mathbf{x}$  в базисе  $\{\mathbf{e}\}$ , если его координаты в базисе  $\{\mathbf{f}\}$  есть  $X^f = (5, 3, 1)$ .

7.6. В пространстве  $R_3$  даны два базиса  $\{\mathbf{e}\}$  и  $\{\mathbf{f}\}$  с координатами базисных векторов в стандартном базисе  $\mathbf{e}_1 = (0, 1, 1)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (2, 1, 1)$ ,  $\mathbf{e}_3 = (1, 0, 1)$  и  $\mathbf{f}_1 = (1, 2, 3)$ ,  $\mathbf{f}_2 = (2, 1, 2)$ ,  $\mathbf{f}_3 = (0, 1, 1)$ .

1) Найти матрицу перехода  $S$  от базиса  $\{\mathbf{e}\}$  к базису  $\{\mathbf{f}\}$ .

2) Найти матрицу обратного перехода.

3) Найти координаты элемента  $\mathbf{f}_1$  в обоих базисах.

4) Найти координаты элемента  $\mathbf{e}_3$  в обоих базисах

4) Координаты  $X^e$  элемента  $\mathbf{x}$  в базисе  $\{\mathbf{e}\}$ , если его координаты в базисе  $\{\mathbf{f}\}$  есть  $X^f = (2, 3, -1)$ .

7.7. В пространстве  $R_4$  даны вектора  $\mathbf{x}_1 = (1, 1, 2, 1)$ ,  $\mathbf{x}_2 = (1, -1, 0, 1)$ ,  $\mathbf{x}_3 = (0, 0, -1, 1)$ ,  $\mathbf{x}_4 = (1, 2, 2, 0)$ , а также вектор  $\mathbf{y} = (1, 1, 1, 1)$ . Показать, что вектора  $\{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_4\}$  образуют базис в  $R_4$  и найти в нём координаты вектора  $\mathbf{y}$ .

7.8. Как изменится структура матрицы  $S$  перехода от некоторого базиса  $\{\mathbf{e}\}$  к другому базису  $\{\mathbf{f}\}$ , если

1) Поменять местами два элемента базиса  $\{\mathbf{e}\}$ ?

2) Поменять местами два элемента базиса  $\{\mathbf{f}\}$ ?

3) Записать элементы обоих базисов в обратном порядке?

7.9. Найти координаты многочлена  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

1) В базисе из функций  $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ .

2) В базисе из функций  $\{1, x - \alpha, (x - \alpha)^2, \dots, (x - \alpha)^n\}$ , где  $\alpha$  - фиксированное число.

3) Записать матрицу перехода между указанными базисами.

## 8. Подпространства линейных пространств

Подмножество  $A$  линейного пространства  $L$  называется линейным подпространством  $L$  относительно введённых в  $L$  операций сложения и умножения на число, если для любых элементов из  $A$  и любых чисел результат сложения и умножения на число вновь является элементом  $A$ . Это означает, что подпространство само является линейным пространством, имеющим базис и размерность. При этом  $\dim A < \dim L$ , поскольку при  $\dim A = \dim L$  подпространство изоморфно всему пространству. Множество всех линейных



комбинаций векторов  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$  пространства  $L$  называется линейной оболочкой этих векторов. Её размерность равна максимальному числу линейно независимых векторов, составляющих данную совокупность, и может быть найдена как ранг матрицы, составленной из столбцов координат векторов  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$ .

Для каких-либо двух подпространств  $A_1$  и  $A_2$  линейного пространства  $L$  определены два новых подпространства, называемые суммой и пересечением  $A_1$  и  $A_2$ . Сумма подпространств  $A_1 + A_2$  определяется как множество, состоящее из всей совокупности элементов  $\mathbf{x}_1 \in A_1$  и  $\mathbf{x}_2 \in A_2$ , а пересечение  $A_1 \cap A_2$  определяется как множество элементов, принадлежащих  $A_1$  и  $A_2$  одновременно. Размерности суммы и пересечения связаны с размерностями  $A_1$  и  $A_2$  соотношением  $\dim(A_1 + A_2) + \dim(A_1 \cap A_2) = \dim A_1 + \dim A_2$ . Если каждый элемент  $\mathbf{x} \in L$  единственным образом представляется в виде  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ , где  $\mathbf{x}_1 \in A_1$ , а  $\mathbf{x}_2 \in A_2$ , то пространство  $L$  представляет собой прямую сумму подпространств  $A_1$  и  $A_2$ , что записывается как  $L = A_1 \oplus A_2$ . В этом случае, очевидно, пересечение  $A_1$  и  $A_2$  состоит лишь из нулевого элемента.

**Пример 1.** Выяснить, является ли множество  $P$  векторов пространства  $R_n$ , все координаты которых равны между собой, подпространством линейного пространства, и если является, то найти его размерность.

**Решение.** Рассмотрим два элемента  $P$ :  $\mathbf{x} = (x, \dots, x)$  и  $\mathbf{y} = (y, \dots, y)$ . Их линейная комбинация  $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}$  имеет координаты  $\alpha x + \beta y$ , которые все равны между собой и, следовательно, также принадлежит  $P$ , которое поэтому является подпространством  $R_n$ . Любой элемент  $P$  задаётся единственным числом, определяющим все его координаты, поэтому  $\dim P = 1$ .

**Пример 2.** Найти размерность суммы и пересечения подпространств  $L_1$  и  $L_2$ , являющихся линейными оболочками векторов  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$  и  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ :

$$\mathbf{a}_1 = (1, 2, 0, 1), \mathbf{a}_2 = (1, 1, 1, 0);$$

$$\mathbf{b}_1 = (1, 0, 1, 0), \mathbf{b}_2 = (1, 3, 0, 1).$$

**Решение.** Размерность каждого из подпространств  $L_1$  и  $L_2$  можно определить, рассматривая матрицы  $M_1$  и  $M_2$  из столбцов координат  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$  и  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ :

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \text{ и } M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ранг каждой из этих матриц равен двум, то есть  $L_1$  и  $L_2$  двумерны. Размерность суммы  $L_1 + L_2$  можно определить, установив ранг матрицы  $M_3$ , являющейся объединением всех столбцов  $\{a_1, a_2\}$  и  $\{b_1, b_2\}$ :

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \text{ Ранг } M_3, \text{ как легко видеть, равен трём: вычтем из первой}$$

строки последнюю и получим матрицу  $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ , у которой первая и третья

строки одинаковы. Вычитая из первой строки третью, получим матрицу  $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$  с нулевой строкой, ранг которой заведомо меньше четырёх.

Поскольку в ней существует ненулевой минор третьего порядка, например, расположенный в первых трёх столбцах и последних трёх строках, ранг данной матрицы равен трём. Итак, размерность суммы подпространств  $L_1 + L_2$  равна трём. Для определения размерности пересечения  $L_1 \cap L_2$  воспользуемся формулой  $\dim(L_1 + L_2) + \dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2$ , откуда  $\dim(L_1 \cap L_2) = 2 + 2 - 3 = 1$ .

### Задачи для самостоятельного решения.

- 8.1. Выяснить, является ли данное подмножество пространства  $R_n$  подпространством, и если является, то найти его размерность.
- 1) Множество векторов, первая координата которых равна нулю.
  - 2) Множество векторов, сумма координат которых равна единице.
  - 3) Множество векторов, сумма координат которых равна нулю.
  - 4) Множество векторов из трёхмерного пространства, концы которых лежат на некоторой прямой.
- 8.2. Выяснить, является ли данное подмножество пространства  $R_{n \times n}$  квадратных матриц порядка  $n$  подпространством, и если является, то найти его размерность и указать базис.
- 1) Матриц с нулевой первой строкой.
  - 2) Диагональных матриц.
  - 3) Верхних треугольных матриц.

- 4) Симметричных матриц.
- 5) Антисимметричных матриц.
- 6) Вырожденных матриц.

8.3. В пространстве  $R_3$  даны вектора  $\mathbf{x}_1 = (0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{x}_2 = (1, 2, 1)$ ,  $\mathbf{x}_3 = (1, 1, 1)$  и  $\mathbf{x}_4 = (3, 4, 3)$ . Найти размерность и указать базис линейной оболочки этих векторов.

8.4. Найти размерность и указать базис в подпространстве  $A \subset R_n$ , если компоненты векторов  $\mathbf{x} \in A$  удовлетворяют условию  $x_1 + \dots + x_n = 0$ .

8.5. Найти размерность суммы и пересечения подпространств  $L_1$  и  $L_2$ , являющихся линейными оболочками векторов  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  и  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ :

$$\mathbf{a}_1 = (1, 1, 1, 1), \mathbf{a}_2 = (1, -1, 1, -1), \mathbf{a}_3 = (1, 3, 1, 3);$$

$$\mathbf{b}_1 = (1, 2, 0, 2), \mathbf{b}_2 = (1, 2, 1, 2), \mathbf{b}_3 = (3, 1, 3, 1).$$

## 9. Евклидовы пространства

Линейное пространство  $L$ , на котором задано скалярное произведение, называется евклидовым. Скалярное произведение  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  определяется как такая числовая функция от двух элементов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  пространства  $L$ , которая удовлетворяет нижеследующим аксиомам.

Для вещественного случая, когда  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}$ :

- 1)  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$  (симметричность);
- 2)  $(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y}, \mathbf{z})$  (дистрибутивность);
- 3)  $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad (\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ , и  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$  (положительная определённость).

В случае комплексного значения скалярного произведения, когда  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{C}$ , пространство называется унитарным. В унитарном пространстве для выполнения аксиомы положительной определённости требуется изменить первую из аксиом, набор которых выглядит следующим образом:

- 1)  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$  (эрмитова симметричность);
- 2)  $(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ , при этом  $(\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y}) = \bar{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ;
- 3)  $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad (\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ , и  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$  (положительная определённость).

В евклидовом пространстве можно ввести понятие нормы, или длины элемента  $\mathbf{x}$ , определив её как  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ . В вещественном случае  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}$  можно также ввести понятие угла между элементами  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ , для которого определён  $\cos \varphi = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) / (\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|)$ . Как в евклидовом, так и в унитарном пространстве элементы  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ , для которых  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ , называются ортогональными.

Пусть в евклидовом пространстве  $L$  выделено какое-либо подпространство  $M$ . Если для каждого вектора  $\mathbf{x} \in M$  найден ортогональный ему вектор  $\mathbf{y}$ , то совокупность всех векторов  $\mathbf{y}$ , для которых  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ , образует новое подпространство  $M^\perp$ , называемое ортогональным дополнением подпространства  $M$ . Любое евклидово пространство является прямой суммой своего подпространства и его ортогонального дополнения.

Если в  $n$ -мерном евклидовом пространстве введён базис  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ , то скалярное произведение элементов может быть выражено через столбцы их координат  $X = (x_1, \dots, x_n)^T$  и  $Y = (y_1, \dots, y_n)^T$  в данном базисе при помощи матричной записи скалярного произведения  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = X^T \Gamma Y$ , где симметричная матрица  $\Gamma_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$  называется матрицей Грама в данном базисе. В случае унитарного пространства скалярное произведение определяется с дополнительным комплексным сопряжением как  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = X^+ \Gamma Y$ , где операция  $X^+ \equiv (\bar{X})^T$  является эрмитовым сопряжением.

В случае, когда  $\Gamma_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$ , т.е. матрица Грама является единичной, базис  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  называется ортонормированным базисом. Примером ортонормированного базиса в  $R_3$  является тройка координатных ортов. Если изначально был задан неортонормированный базис  $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n\}$ , то линейными преобразованиями из него можно получить ортонормированный базис  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  по методу ортогонализации Грама-Шмидта:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1 / \sqrt{(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1)};$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{g}_2 / \sqrt{(\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_2)}, \text{ где } \mathbf{g}_2 = \mathbf{f}_2 - (\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1;$$

.....

$$\mathbf{e}_n = \mathbf{g}_n / \sqrt{(\mathbf{g}_n, \mathbf{g}_n)}, \text{ где } \mathbf{g}_n = \mathbf{f}_n - (\mathbf{f}_n, \mathbf{e}_{n-1})\mathbf{e}_{n-1} - \dots - (\mathbf{f}_n, \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1.$$

**Пример 1.** Выяснить, можно ли в вещественном пространстве  $R_n$  ввести скалярное произведение по формуле  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 - 2x_2 y_2$ ,  $n = 2$ .

**Решение.** Прежде всего, рассмотрим аксиому положительной определённости, вычислив скалярный квадрат:  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_2^2$ . Видно, что данное выражение отрицательно для ненулевого вектора  $\mathbf{x} = (0, 1)$ , поэтому предложенным способом ввести скалярное произведение нельзя.

**Пример 2.** В комплексном пространстве  $C_n$  со скалярным произведением

$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k$  построить базис в ортогональном дополнении  $M^\perp$

подпространства  $M$ , если компоненты векторов  $\mathbf{x} \in M$  удовлетворяют уравнению  $x_1 + ix_2 = 0$  и  $n = 2$ .

**Решение.** Для элемента  $\mathbf{y} \in M^\perp$ , ортогонального  $\mathbf{x} \in M$ , имеем условие ортогональности  $x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 = 0$ . Если  $\mathbf{x} \in M$ , то по определению подпространства  $M$  его вторая компонента связана с первой соотношением  $x_2 = ix_1$ , поэтому  $x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 = x_1 \bar{y}_1 + ix_1 \bar{y}_2 = 0$ , откуда  $\bar{y}_1 + i\bar{y}_2 = 0$ . Последнее равенство, эквивалентное  $y_1 - iy_2 = 0$ , полностью определяет подпространство  $M^\perp$ . Из двух координат его элементов одну, например,  $y_1$ , можно задавать произвольно, т.е.  $M^\perp$  является одномерным, как и само  $M$ . Вторая координата определяется из условия  $y_1 - iy_2 = 0$ . Таким образом, базисным вектором в  $M^\perp$  будет, например, вектор  $\mathbf{e} = (1, -i)^T$ .

### Задачи для самостоятельного решения.

9.1. Могут ли векторы  $\mathbf{x}_1 = (1, 1, 1)$ ,  $\mathbf{x}_2 = (1, 1, 0)$  и  $\mathbf{x}_3 = (1, 0, 0)$  образовать базис в трёхмерном пространстве? Построить с помощью данной системы векторов ортонормированный базис.

9.2. Найти все значения  $\lambda$ , при которых вектор  $\mathbf{x} = (7, -2, \lambda)$  линейно выражается через векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ :  $\mathbf{e}_1 = (2, 3, 5)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (3, 7, 8)$ ,  $\mathbf{e}_3 = (1, -6, 1)$ . Построить ортонормированный базис на векторах  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ .

9.3. Выяснить, можно ли в вещественном пространстве  $R_n$  ввести скалярное произведение по формуле:

1)  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2, n = 2;$

2)  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2, n = 2.$

9.4. Выяснить, можно ли в унитарном пространстве  $C_n$  ввести скалярное произведение по формуле:

1)  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 3x_1\bar{y}_1 + 4x_2\bar{y}_2, \text{ а) } n = 2, \text{ б) } n = 3;$

2)  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1\bar{y}_2, n = 2;$

3)  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ix_1\bar{y}_2 + ix_2\bar{y}_1, n = 2;$

4)  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1\bar{y}_1 + (1+i)x_1\bar{y}_2 + (1-i)x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2, n = 2;$

5)  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 5x_1\bar{y}_1 + ix_2\bar{y}_2, n = 2.$

9.5. Можно ли в линейном пространстве квадратных матриц второго порядка ввести скалярное произведение по формуле

$$(A, B) = a_1a_2 - b_2b_1 + c_1c_2 - d_1d_2, \text{ где } A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \text{ и } B = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} ?$$

Предложить свой способ введения скалярного произведения в пространстве матриц.

9.6. Показать, что скалярное произведение в пространстве многочленов степени, не превосходящей двух, может быть введено по формуле

$$(f, g) = f(-1) \cdot g(-1) + f(0) \cdot g(0) + f(1) \cdot g(1).$$

9.7. Показать, что в пространстве многочленов степени не выше  $n$  скалярное произведение может быть задано с помощью коэффициентов многочленов

$$(a_0, a_1, \dots, a_n) \text{ и } (b_0, b_1, \dots, b_n) \text{ по формуле } (f, g) = \sum_{i=0}^n a_i b_i. \text{ Вычислить матрицу Грама такого скалярного произведения в базисе } \{1, t, t^2, \dots, t^n\}.$$

9.8. Показать, что скалярное произведение в пространстве вещественных функций, интегрируемых на отрезке  $[a, b]$ , может быть введено по формуле

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

- 9.9. В комплексном пространстве  $C_2$  скалярное произведение введено по формуле  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 \bar{y}_1 + (1+i)x_1 \bar{y}_2 + (1-i)x_2 \bar{y}_1 + 3x_2 \bar{y}_2$ , а также выбран новый базис  $\mathbf{f}_1 = (1, 0)$ ,  $\mathbf{f}_2 = (1, -1)$ . Найти матрицу Грама в базисе  $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ , а также выразить скалярное произведение  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  через компоненты  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  в этом базисе.
- 9.10. Доказать, что в унитарном пространстве из равенства  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$  следует равенство  $\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2$ . Что можно сказать о значении  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , если известно, что в унитарном пространстве последнее равенство выполнено?
- 9.11. Найти ошибку в доказательстве: «В евклидовом пространстве  $R_n$  дан произвольный базис  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ . Координаты элемента  $\mathbf{e}_k$  в данном базисе все равны нулю, кроме  $(\mathbf{e}_k)_k = 1$ . Тогда при  $p \neq k$  скалярное произведение двух различных векторов базиса  $(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_p) = 0 \cdot 0 + \dots + 1 \cdot 0 + \dots + 0 \cdot 1 + \dots + 0 \cdot 0 = 0$ , т.е. базис является ортонормированным».
- 9.12. В пространстве  $R_4$  даны три линейно независимых вектора  $\mathbf{x}_1 = (1, 0, 1, -1, 2)$ ,  $\mathbf{x}_2 = (1, 0, 1, -1, -2)$  и  $\mathbf{x}_3 = (1, 0, 3, 0, 0)$ . Построить по методу Грама-Шмидта ортонормированный базис в линейной оболочке этих векторов.
- 9.13. В пространстве многочленов степени не выше двух с базисом  $\{1, x, x^2\}$  задано скалярное произведение  $(f, g) = f(-1) \cdot g(-1) + f(0) \cdot g(0) + f(1) \cdot g(1)$ . Построить по методу Грама-Шмидта ортонормированный базис в этом пространстве.
- 9.14. Построить по методу Грама-Шмидта первые три ортонормированные вектора в  $n+1$ -мерном пространстве многочленов  $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ , если скалярное произведение задано как  $(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ .

9.15. Построить по методу Грама-Шмидта первые три вектора ортонормированного базиса в бесконечномерном пространстве функций  $f_n(x) = \text{Exp}(-nx)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , если скалярное произведение задано как

$$(f, g) = \int_0^{\infty} f(x)g(x)dx.$$

9.16. Показать, что в пространстве непрерывных на  $[0, 1]$  функций со скалярным

произведением  $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$  угол между соседними векторами

$\mathbf{f}_n = t^{n-1}$  и  $\mathbf{f}_{n+1} = t^n$  стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ .

9.17. В комплексном пространстве  $C_n$  со скалярным произведением

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k$$

построить базис в ортогональном дополнении  $M^\perp$

подпространства  $M$ , если компоненты векторов  $\mathbf{x} \in M$  удовлетворяют уравнению:

$$1) x_1 + ix_2 + (1 - i)x_3 = 0, \quad n = 3;$$

$$2) -ix_1 + (2 + i)x_2 - x_3 = 0, \quad n = 3.$$



## Глава 3. Линейные операторы

С элементами линейных пространств можно производить различные преобразования, которые в линейной алгебре сами, в свою очередь, являются линейными. В курсе аналитической геометрии уже рассматривались линейные преобразования координат, например, повороты вокруг какой-либо оси, каждому из которых была сопоставлена некоторая матрица. Линейные преобразования, или операторы, а также их матричные представления, играют исключительно важную роль в квантовой физике, где каждой физически наблюдаемой величине сопоставляется определённый самосопряжённый оператор.

### 10. Определение и матричная запись линейных операторов

Линейным оператором  $A$ , действующим из линейного пространства  $L$  в линейное пространство  $M$ , называется отображение, сопоставляющее элементу  $\mathbf{x} \in L$  элемент  $\mathbf{y} \in M$  и линейное по своему аргументу:  $A(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2) = \alpha A(\mathbf{x}_1) + \beta A(\mathbf{x}_2)$ . Заметим, что образы элементов  $\mathbf{x}_{1,2} \in L$  являются, вообще говоря, элементами другого пространства  $M$ , при этом всегда  $A(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . Множество образов  $A(\mathbf{x}) \in M$  всех векторов  $\mathbf{x} \in L$  называется образом оператора  $A$  и обозначается  $\text{im}A$ . Множество векторов  $\mathbf{x} \in L$ , отображающихся в нулевой элемент пространства  $M$ , называется ядром оператора  $A$  и обозначается  $\text{ker} A$ .

Если образ элементов пространства  $L$  также лежит в  $L$ , то линейный оператор  $A$  называется линейным преобразованием пространства  $L$ . В дальнейшем, если особо не оговорено, мы будем понимать под операторами линейные преобразования соответствующих пространств. Среди операторов выделяют единичный оператор  $E$ , обладающий свойством  $\forall \mathbf{x} \in L \ E\mathbf{x} = \mathbf{x}$ .

Произведение операторов  $A$  и  $B$  определяется как оператор, действующий по правилу  $AB(\mathbf{x}) = A(B(\mathbf{x}))$ . Как и в случае произведения матриц, умножение операторов некоммутативно и в общем случае  $AB \neq BA$ , при этом разность  $[A, B] \equiv AB - BA$  называется коммутатором данных операторов. В случае равенства коммутатора нулевому оператору отображения  $A$  и  $B$  называются коммутирующими (перестановочными).

Пусть в  $n$ -мерном линейном пространстве  $L$  выбран базис  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ . Подействуем на каждый из базисных векторов линейным оператором  $A$ , в результате чего получится набор образов базисных векторов  $\{A\mathbf{e}_1, \dots, A\mathbf{e}_n\}$ . Каждый вектор из данного набора можно разложить по базису  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ , при этом любому вектору  $A\mathbf{e}_j$  будет отвечать столбец своих координат высоты  $n$ . Всего будем иметь  $n$  столбцов, которые, следовательно, образуют квадратную матрицу  $A$  порядка  $n$ , называемую матрицей линейного оператора  $A$  в базисе  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ . Единичному оператору соответствует единичная матрица. Данное определение, очевидно, можно обобщить на случай отображения  $n$ -мерного пространства  $L$  в  $m$ -мерное пространство  $M$ , в результате чего матрица оператора  $A$  будет прямоугольной матрицей порядка  $m \times n$ .

Оператор  $A^{-1}$ , удовлетворяющий соотношению  $A^{-1}A = AA^{-1} = E$ , называется обратным оператором для данного оператора  $A$ . Необходимым и достаточным условием наличия обратного для данного  $A$  является его взаимная однозначность, т.е. наличие в  $\ker A$  лишь нулевого элемента. Матрица обратного оператора равна обратной матрице исходного оператора, откуда видно, что обратимым может быть лишь отображение между двумя пространствами с одинаковой размерностью, либо преобразование линейного пространства. Для примера рассмотрим линейное преобразование двумерного пространства с матрицей  $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ . Поскольку  $\det A = 0$ , данное

преобразование не имеет обратного. Убедимся, что ядро оператора  $A$  в данном случае состоит не только из нулевого элемента: для множества векторов вида  $\mathbf{x}_0 = \alpha(0, 1)^T$  имеем  $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ , т.е.  $\mathbf{x}_0 \in \ker A$ . Рассматривая действие данного оператора на произвольный вектор  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ , получаем, что образом оператора является одномерное, как и ядро, пространство векторов  $\text{im} A = x_1(1, 0)$ .

Если при помощи невырожденной матрицы  $S$  выполнен переход от базиса  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  к базису  $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n\}$ , то матрица  $A_f$  оператора  $A$  в новом базисе связана с матрицей  $A_e$  в старом базисе соотношением  $A_f = S^{-1}A_e S$ .

**Пример 1.** Выяснить, является ли данное преобразование пространства  $R_n$

линейным:  $A(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}, n = 2;$

**Решение.** Проверяем линейность преобразования по формуле  $A(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha A(\mathbf{x}) + \beta A(\mathbf{y})$ .

Имеем:  $A(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = ((\alpha x_2 + \beta y_2), (\alpha(x_1 - x_2) + \beta(y_1 - y_2)))^T$ , что равно  $\alpha(x_2, x_1 - x_2)^T + \beta(y_2, y_1 - y_2)^T = \alpha A(\mathbf{x}) + \beta A(\mathbf{y})$ , т.е. данное преобразование является линейным.

**Пример 2.** Записать в декартовом базисе трёхмерного пространства матрицу оператора проектирования на прямую линию, заданную уравнением  $x = z = 0$ .

**Решение.** Матрица любого линейного оператора в данном базисе может быть построена при рассмотрении действия этого оператора на базисные вектора. Направляющий вектор  $\mathbf{a}$  данной прямой имеет координаты  $(1, 1, 1)$ . Обозначим проекцию каждого из единичных векторов декартового базиса как  $\mathbf{e}_i'$ . Все вектора  $\mathbf{e}_i'$  параллельны  $\mathbf{a}$  и имеют длину, равную направляющему косинусу вектора  $\mathbf{a}$ , т.е.  $1/\sqrt{3}$ . Компоненты  $\mathbf{e}_i'$  в исходной декартовой системе получаются после проектирования  $\mathbf{e}_i'$  на оси системы координат, что даёт

$\mathbf{e}_i' = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^T = \frac{1}{3} (1, 1, 1)^T$ . Так выглядит любой из

столбцов матрицы оператора, которая окончательно имеет вид  $A = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ .

### Задачи для самостоятельного решения.

10.1. Выяснить, является ли данное преобразование пространства  $R_n$  линейным:

$$1) A(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}, n = 2; \quad 2) A(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}, n = 2;$$

$$3) A(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}, n = 2; \quad 4) A(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 - 3 \\ x_3 \end{pmatrix}, n = 3;$$

$$5) A(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_3 + x_1 \\ 2x_3x_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}, n=3; \quad 6) A(\mathbf{x}) = \mathbf{0}; \quad 7) A(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 + 3x_2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}, n=3.$$

10.2. Пусть  $M$  - подпространство линейного пространства  $L$ . Отображение  $\varphi: L \rightarrow M$  определено следующими правилами:  $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  при  $\mathbf{x} \in M$  и  $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  при  $\mathbf{x} \notin M$ . Является ли  $\varphi$  линейным оператором?

10.3. Преобразования трёхмерного векторного пространства  $R_3$  имеют вид

$$1) A(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{a}) \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}, \quad 2) A(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{n})}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})} \mathbf{a},$$

где  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{n}$  - фиксированные вектора. Проверить, что данные преобразования являются линейными, и указать их геометрический смысл.

10.4. Линейный оператор  $A$ , действующий в  $R_3$ , осуществляет проектирование векторов из этого пространства на прямую, заданную уравнениями  $x_1 = x_2 = x_3$ . Записать матрицу  $A$  в декартовом базисе.

10.5. Записать в декартовом базисе трёхмерного пространства матрицу оператора проектирования на плоскость, заданную уравнением  $x + y + z = 0$ .

10.6. Записать в декартовом базисе матрицу оператора поворота на угол  $\varphi = 2\pi/3$  вокруг прямой  $x_1 = x_2 = x_3$ .

10.7. Записать в базисе из тригонометрических функций  $\{\cos x, \sin x\}$  матрицу оператора дифференцирования  $D = d/dx$ .

10.8. Дан базис  $\mathbf{f}_1 = (0, 1)$  и  $\mathbf{f}_2 = (1, 0)$  пространства  $R_2$ . Найти матрицу  $A_f$  оператора  $A$  в этом базисе, если в стандартном базисе образы базисных векторов имеют вид  $A\mathbf{f}_1 = (2, 3)$  и  $A\mathbf{f}_2 = (4, 5)$ .

10.9. Найти ядро и образ оператора  $A$ , заданного своей матрицей в пространстве  $R_n$ :

$$1) A = \begin{vmatrix} 25 & 60 \\ 60 & 144 \end{vmatrix}, n=2; \quad 2) A = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{vmatrix}, n=3.$$

10.10. В базисе  $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$  пространства многочленов степени не выше  $n$  записать матрицу, а также найти ядро и образ следующих операторов:

1) Оператор дифференцирования  $D = d/dt$ ;

2) Оператора интегрирования  $I = \int_0^t f(\xi) d\xi$ .

### 11. Задача о собственных значениях и собственных векторах

Если образы оператора  $A$  от векторов некоторого подпространства  $M$  линейного пространства  $L$  вновь лежат в подпространстве  $M$ , то оно называется инвариантным подпространством оператора  $A$ , действующего в  $L$ . В случае, когда  $M$  одномерно, то есть для всех  $\mathbf{x} \in M$  имеем  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ , где  $\lambda$  - вещественное или комплексное число. Тогда ненулевой вектор  $\mathbf{x}$  называется собственным вектором оператора  $A$ , а число  $\lambda$  - соответствующим ему собственным значением. Набор собственных значений линейного оператора называется его спектром. Если в  $n$ -мерном пространстве  $L$  задан базис  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  и определена матрица  $A$  данного оператора, то нахождение собственных значений и собственных векторов представляет собой задачу о решении системы линейных однородных уравнений порядка  $n$  для компонент собственного вектора  $\mathbf{x}$ , описываемую матрицей  $(A - \lambda E)$ . Собственные значения  $\lambda$  находятся из условия равенства нулю определителя данной системы, а полученное в результате алгебраическое уравнение  $\det(A - \lambda E) = 0$ , являющееся уравнением  $n$ -й степени на  $\lambda$ , называется характеристическим уравнением. Согласно основной теореме алгебры, во множестве комплексных чисел характеристическое уравнение всегда имеет  $n$  корней с учётом их кратности. Число вещественных корней может быть меньше, и они могут отсутствовать вовсе.

**Пример 1.** Найти собственные значения и собственные вектора оператора, заданного своей матрицей  $A = \begin{vmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{vmatrix}$ .

**Решение.** Для нахождения собственных значений решаем уравнение  $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2+2i \\ 2-2i & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ , откуда  $\lambda_1 = 5$  и  $\lambda_2 = -1$ . Для первого собственного

значения система уравнений для компонент собственного вектора имеет вид  $\begin{cases} -2x_1 + (2+2i)x_2 = 0 \\ (2-2i)x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$ , откуда первый собственный вектор  $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Для второго собственного значения имеем систему уравнений  $\begin{cases} 4x_1 + (2+2i)x_2 = 0 \\ (2-2i)x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$ , откуда находим компоненты второго собственного

вектора  $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1+i)/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**Пример 2.** Найти собственные значения и собственные вектора оператора, заданного матрицей  $A = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ , с учётом принадлежности собственных значений множеству рациональных чисел.

**Решение.** Характеристическое уравнение имеет вид  $\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ , или

$\lambda^2 - 7 = 0$ . Поскольку данное уравнение не имеет корней в области рациональных чисел, то собственных значений и собственных векторов, удовлетворяющих условию задачи, не существует.

### Задачи для самостоятельного решения.

11.1. Найти собственные значения и собственные вектора оператора, заданного матрицей  $A = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ , с учётом принадлежности собственных значений множеству вещественных чисел.

11.2. Найти собственные значения и собственные вектора операторов, заданных своими матрицами:

$$1) A = \begin{vmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 7 \end{vmatrix}; \quad 2) A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \quad 3) A = \begin{vmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}; \quad 4) \\ A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad 5) A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

11.3. Операторы  $L_1$  и  $L_2$  в некотором базисе представлены матрицами

$$L_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \text{ и } L_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{vmatrix}. \text{ Найти собственный базис оператора}$$

$L_1$  и вид матриц  $L_1$  и  $L_2$  в этом базисе.

11.4. Найти вид оператора с матрицей Паули  $\sigma_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  в собственном базисе оператора с матрицей Паули  $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ .

11.5. Найти собственные значения и собственные векторы оператора проектирования на прямую линию, заданную уравнениями  $x_1 = x_2 = x_3$ .

11.6. Пусть  $\mathbf{x}_1$  и  $\mathbf{x}_2$  - собственные вектора линейного оператора  $A$ , отвечающие различным собственным значениям  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Показать, что вектор  $\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2$  с ненулевыми числами  $\alpha$  и  $\beta$  не является собственным вектором оператора  $A$ .

11.7. Найти собственные функции и собственные значения оператора  $-i \frac{\partial}{\partial \varphi}$ , где  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

11.8. Пусть линейные операторы  $A$  и  $B$  коммутируют. Показать, что в этом случае у них имеется общий набор базисных векторов.

## 12. Линейные операторы в евклидовых пространствах

В евклидовом пространстве  $L$  со скалярным произведением  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  для данного линейного оператора  $A$  можно ввести понятие сопряжённого ему оператора  $A^*$ , удовлетворяющего равенству  $(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, A^*\mathbf{y})$  для любых элементов пространства. В базисе  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  с матрицей Грама  $\Gamma_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$  матрица сопряжённого оператора вычисляется по формуле  $A^* = \Gamma^{-1} A^T \Gamma$  в вещественном случае и  $A^* = \overline{(\Gamma^{-1} A^T \Gamma)}$  в комплексном случае, где черта обозначает комплексное сопряжение. В частности, в ортонормированном базисе  $A^* = A^T$  в вещественном евклидовом пространстве и  $A^* = A^+$  в унитарном пространстве. Оператор, для которого  $A^* = A$ , называется самосопряжённым, или эрмитовым. Его матрица, как это следует из формулы для  $A^*$ , является вещественной симметричной либо комплексной эрмитовой матрицей. Её собственные значения вещественны, а собственные вектора, относящиеся к различным собственным значениям, ортогональны и образуют базис в пространстве  $L$ .

Оператор  $U$ , сохраняющий скалярное произведение, т.е. удовлетворяющий соотношению  $(U\mathbf{x}, U\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$  для любых векторов пространства  $L$ , называют ортогональным оператором в случае вещественного пространства и унитарным оператором в случае комплексного пространства. В этом случае матрица сопряжённого оператора в ортонормированном базисе равна обратной матрице,  $U^* = U^{-1}$ . Собственные значения унитарных операторов по модулю равны единице, а собственные вектора, как и для самосопряжённого оператора, образуют ортонормированный базис.

**Пример 1.** Найти сопряжённый оператор к линейному оператору  $A$ , осуществляющему поворот на угол  $\varphi = 2\pi/3$  вокруг прямой  $x_1 = x_2 = x_3$  в пространстве  $R_3$ .

**Решение.** При указанном в задачи повороте базисные вектора декартовой системы преобразуются следующим образом:  $\mathbf{e}_1 \rightarrow \mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_2 \rightarrow \mathbf{e}_3$ ,  $\mathbf{e}_3 \rightarrow \mathbf{e}_1$ ,

поэтому матрица преобразования имеет вид  $A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ .

В ортонормированном базисе вещественного пространства матрица



сопряжённого оператора равна транспонированной матрице исходного оператора, поэтому окончательно имеем  $A^* = A^T = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ .

**Пример 2.** В евклидовом пространстве  $R_2$  со стандартным ортонормированным базисом  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  задан базис  $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$  и матрица  $A_f$  линейного оператора  $A$  в этом базисе. Найти в базисе  $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$  матрицу сопряжённого оператора  $A_f^*$ , если  $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{f}_2 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ , и  $A_f = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ .

**Решение.** Матрица сопряжённого оператора находится по формуле  $A^* = \Gamma^{-1} A^T \Gamma$ , где  $\Gamma_{ij}^f = (\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j)$  есть матрица Грама в базисе  $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ . Вычисляя её в с помощью формул  $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{f}_2 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$  и используя ортонормированность базиса  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ , имеем  $\Gamma_f = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ , а обратная

матрица имеет вид  $\Gamma_f^{-1} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ . Вычисляя произведение трёх матриц

$A^* = \Gamma^{-1} A^T \Gamma$ , получаем окончательно  $A_f^* = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$ .

### Задачи для самостоятельного решения.

12.1. Линейный оператор  $A$ , действующий в  $n$ -мерном пространстве  $L$ , задан диагональной матрицей с коэффициентами  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Найти матрицу сопряжённого оператора  $A^*$ , если (а) все коэффициенты  $\lambda_i \in \mathbf{R}$  и (б) все коэффициенты  $\lambda_i \in \mathbf{C}$ . Является ли оператор  $A$  самосопряжённым?

12.2. В евклидовом пространстве  $R_2$  со стандартным ортонормированным базисом  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  задан базис  $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$  и матрица  $A_f$  линейного оператора  $A$  в этом базисе. Найти в базисе  $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$  матрицу сопряжённого оператора  $A_f^*$ , если  $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{f}_2 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ , и  $A_f = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ .

12.3. Пусть в евклидовом пространстве  $L$  задан самосопряжённый оператор  $A$ , имеющий обратный. Показать, что обратный оператор также является самосопряжённым.

- 12.4. В пространстве  $R_3$  задан оператор векторного умножения  $A\mathbf{x} = [\mathbf{a}, \mathbf{x}]$ , где  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$  - фиксированный вектор. Найти сопряжённый оператор  $A^*$ .
- 12.5. Может ли матрица самосопряжённого преобразования вещественного евклидова пространства быть несимметричной?
- 12.6. Пусть  $M$  - инвариантное относительно ортогонального оператора  $A$  подпространство евклидова пространства  $L$ . Показать, что ортогональное дополнение  $M^\perp$  также инвариантно относительно оператора  $A$ .
- 12.7. В евклидовом пространстве  $R_2$  самосопряжённый оператор  $A$  задан своей матрицей  $A$ . Найти матрицу оператора  $B$  такого, что  $B^2 = A$  (задача о корне из оператора). Существует ли решение задачи для любого самосопряжённого оператора?
- 1)  $A = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix}$ ;      2)  $A = \begin{vmatrix} 5/2 & 3/2 \\ 3/2 & 5/2 \end{vmatrix}$ .

## Глава 4. Билинейные и квадратичные формы

В курсе аналитической геометрии рассматривались уравнения кривых второго порядка на плоскости, а также уравнения поверхностей второго порядка в пространстве. В эти уравнения входит сумма некоторого числа слагаемых второго порядка, называемая группой квадратичных слагаемых. Обобщением подобных выражений на случай пространства любого числа измерений является теория квадратичных (от одного аргумента) и билинейных (от двух аргументов) форм. Как и в задачах аналитической геометрии, основным вопросом является выбор такой системы координат, где форма имеет наиболее простой вид суммы квадратов с определёнными коэффициентами, называемый каноническим видом. Кроме того, в приложениях к механике очень важен вопрос о постоянстве знака для значений, принимаемых квадратичной формой при различных аргументах, что приводит к необходимости изучения классификации квадратичных форм.

### 13. Матрица билинейной и квадратичной форм. Приведение к каноническому виду

Билинейной формой  $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , заданной на линейном пространстве  $L$ , называется числовая функция от двух элементов данного пространства, линейная по каждому из них, т.е.  $B(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \alpha B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta B(\mathbf{z}, \mathbf{y})$  и аналогично для второго аргумента. Мы будем рассматривать вещественные формы, когда значение  $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  при любых значениях аргументов является вещественным числом. Если  $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = B(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ , то билинейная форма называется симметричной. Функция одного аргумента  $A(\mathbf{x}) \equiv B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ , полученная из симметричной билинейной формы, называется квадратичной формой. Обратное, по заданной квадратичной форме  $A(\mathbf{x})$  может быть построена симметричная билинейная форма

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - A(\mathbf{x}) - A(\mathbf{y})).$$

В базисе  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$   $n$ -мерного пространства  $L$  билинейная и квадратичная формы могут быть записаны через столбцы координат  $X = (x_1, \dots, x_n)^T$  и  $Y = (y_1, \dots, y_n)^T$  своих аргументов при помощи матричной записи билинейной формы  $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = X^T B Y$ , где матрица билинейной формы определена через её значения на базисных векторах как  $b_{ij} = B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ . В координатах векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  значения форм

записываются как  $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i y_j$  и  $A(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ , при этом

матрица  $a_{ij}$  квадратичной формы всегда является симметричной. В частности, скалярное произведение в вещественном евклидовом пространстве представляет собой билинейную форму с симметричной матрицей, являющейся матрицей Грама. Если при помощи невырожденной матрицы  $S$  выполнен переход от базиса  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  к базису  $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n\}$ , то матрица  $B_f$  билинейной формы  $B$  в новом базисе связана с матрицей  $B_e$  в старом базисе соотношением  $B_f = S^T B_e S$ .

Базис, в котором матрица квадратичной формы имеет диагональный (канонический) вид, называется каноническим базисом. Квадратичная форма в таком базисе является суммой квадратов координат её аргумента,

$$A(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2, \text{ где коэффициенты } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \text{ называются каноническими}$$

коэффициентами. Привести билинейную (квадратичную) форму к каноническому виду, или диагонализировать её, означает построить суперпозицию невырожденных преобразований базисов, в последнем из которых матрица формы является диагональной, при этом числа на диагонали матрицы будут искомыми каноническими коэффициентами. Один из методов диагонализации, известный как метод Лагранжа, заключается в пошаговом выделении полного квадрата каждой из координат в выражении для формы  $A(\mathbf{x})$ . Другой метод основан на выполнении в евклидовом пространстве равенства  $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (A\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , где  $A$  - некоторый самосопряжённый оператор, называемый присоединённым к билинейной (квадратичной) форме  $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . В ортонормированном базисе матрицы билинейной формы и присоединённого оператора совпадают, поэтому в новом базисе, состоящем из собственных векторов присоединённого оператора  $A$ , билинейная (квадратичная) форма имеет диагональный вид, а её каноническими коэффициентами являются собственные значения оператора  $A$ . Поскольку переход от одного ортонормированного базиса к другому осуществляется ортогональным либо унитарным преобразованием, данный способ приведения к каноническому виду называется приведением ортогональным преобразованием.

**Пример 1.** По заданной квадратичной форме  $A = -18x_1x_2 + 9x_2^2$  составить билинейную форму в пространстве  $R_2$  и записать её матрицу.

**Решение.** Как известно, по заданной квадратичной форме  $A(\mathbf{x})$  может быть построена симметричная билинейная форма, задаваемая выражением

$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - A(\mathbf{x}) - A(\mathbf{y}))$ . Используя эту формулу, получаем, что

для данной  $A(\mathbf{x})$  билинейная форма имеет вид

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -9x_1y_2 - 9x_2y_1 + 9x_2y_2, \text{ и ей соответствует матрица } B = \begin{vmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 9 \end{vmatrix}$$

. Выполним проверку, подставив найденную билинейную форму в выражение  $A(\mathbf{x}) \equiv B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  для квадратичной формы, получив в результате исходное выражение для  $A(\mathbf{x})$ .

**Пример 2.** Привести квадратичную форму  $A(\mathbf{x}) = 2x_3x_4$  в пространстве  $R_4$  к каноническому виду методом Лагранжа, найдя канонические коэффициенты и преобразование базиса.

**Решение.** В исходной форме отсутствует слагаемое с квадратом какой-либо из координат, поэтому сразу произвести выделение полного квадрата невозможно. По аналогии с задачами аналитической геометрии о приведении уравнений кривых второго порядка к каноническому виду можно применить

преобразование поворота  $\begin{cases} x_3 = \frac{y_3 - y_4}{\sqrt{2}} \\ x_4 = \frac{y_3 + y_4}{\sqrt{2}} \end{cases}$  по переменным  $x_3, x_4$ , оставив  $y_1 = x_1$  и

$y_2 = x_2$ . В новых координатах квадратичная форма сразу примет канонический вид  $A(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_3^2 - y_4^2$  с каноническими коэффициентами  $(0, 0, 1, -1)$  и преобразованием базиса

$$(x_1, \dots, x_n)^T = S(y_1, \dots, y_n)^T \text{ с матрицей } S = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{vmatrix}.$$

### Задачи для самостоятельного решения.

13.1. Составить матрицу данной симметричной билинейной формы в пространстве  $R_n$  и записать соответствующую ей квадратичную форму:

- 1)  $B = x_1y_1, n = 1;$
- 2)  $B = x_1y_1, n = 2;$
- 3)  $B = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 - 5x_2y_2, n = 2.$

13.2. По заданной квадратичной форме составить билинейную форму в пространстве  $R_n$  и записать её матрицу:

1)  $A = -3x_1^2$ ,  $n = 1$ ;      2)  $A = 2x_1^2 - 6x_1x_2 - 3x_2^2$ ,  $n = 3$ ;

3)  $A = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 12x_2x_3 + 7x_3^2$ ,  $n = 3$ ;

4)  $A = \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$ .

13.3. Привести квадратичную форму в пространстве  $R_3$  к каноническому виду методом Лагранжа, найдя канонические коэффициенты и преобразование базиса:

1)  $A(\mathbf{x}) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$ ;

2)  $A(\mathbf{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$ ;

3)  $A(\mathbf{x}) = x_1x_2 + x_2x_3$ ;      4)  $A(\mathbf{x}) = x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ .

13.4. Привести квадратичные формы в пространстве  $R_3$  к каноническому виду методом ортогонального преобразования, найдя канонические коэффициенты и преобразование базиса:

1)  $A(\mathbf{x}) = -2x_2x_3$ ;      2)  $A(\mathbf{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2$ ;

3)  $A(\mathbf{x}) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$ .

#### 14. Классификация квадратичных форм

Квадратичная форма  $A(\mathbf{x})$  называется положительно определённой, если  $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  имеем  $A(\mathbf{x}) > 0$  и  $A(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Соответственно, сменой знака неравенства вводится понятие отрицательной определённости квадратичной формы, а при наличии нестрогого неравенства форма называется полуопределённой. Квадратичная форма полностью определяется набором своих канонических коэффициентов  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , полученных при

приведении её к диагональному виду  $A(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$ . Если все  $\lambda_i > 0$ ,

форма  $A(\mathbf{x})$ , очевидно, является положительно определённой. Канонический

базис и значение всех  $\lambda_i$  зависит от способа приведения к диагональному виду, однако число положительных и отрицательных канонических коэффициентов является инвариантом преобразования базиса. Это утверждение носит название закона инерции квадратичных форм.

Установить знакоопределённость квадратичной формы по её матрице  $a_{ij}$ , не приводя её к каноническому виду, позволяет критерий Сильвестра. Для этого изучаются знаки угловых миноров  $\Delta_k$  матрицы  $a_{ij}$ , представляющие собой определители  $k$ -го порядка, составленные из элементов в левом верхнем углу матрицы  $a_{ij}$  размером  $k \times k$ . Если все  $\Delta_k > 0$ , квадратичная форма с матрицей  $a_{ij}$  является положительно определённой. Если знаки  $\Delta_k$  чередуются, причём  $\Delta_1 < 0$ , квадратичная форма является отрицательно определённой. Заметим, что в обоих случаях  $\det A = \Delta_n \neq 0$ . Наконец, если указанные условия не выполняются, форма  $a_{ij}$  не является знакоопределённой.

**Пример 1.** При каких значениях параметра  $\lambda$  квадратичная форма  $A(\mathbf{x}) = \lambda x_1^2 - 4x_1x_2 + (\lambda + 3)x_2^2$  является (а) положительно определённой и (б) отрицательно определённой?

**Решение.** Составим матрицу данной квадратичной формы:  $A = \begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ -2 & \lambda + 3 \end{vmatrix}$ .

Найдём её угловые миноры:  $\Delta_1 = a_{11} = \lambda$ ,  $\Delta_2 = \det A = \lambda(\lambda + 3) - 4$ . Для положительной определённости необходимо одновременное выполнение условий  $\Delta_1 > 0$  и  $\Delta_2 > 0$ . Решая полученную систему неравенств относительно параметра  $\lambda$ , находим, что форма является положительно определённой при  $\lambda > 1$ . Далее, условие отрицательной определённости означает, что  $\Delta_1 < 0$  и  $\Delta_2 > 0$ , что приводит к другому решению системы неравенств относительно параметра  $\lambda$ , именно,  $\lambda < -4$ . Наконец, в промежутке значений  $-4 < \lambda < 1$  квадратичная форма не является ни положительно, ни отрицательно определённой, поскольку критерий Сильвестра для данных значений  $\lambda$  не выполняется.

**Пример 2.** При каком необходимом и достаточном условии две квадратичные формы  $A(\mathbf{x})$  и  $-A(\mathbf{x})$  могут быть приведены к одному каноническому виду?

**Решение.** Проиллюстрируем решение задачи на простом примере. Вначале в двумерном пространстве рассмотрим квадратичную форму  $A(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2$ , имеющую канонический вид. У данной формы ранг равен двум, а число отрицательных и положительных коэффициентов равно. Форма  $-A(\mathbf{x}) = -x_1^2 + x_2^2$  также имеет канонический вид, отличающийся от предыдущего общим знаком. Для того чтобы канонические виды совпадали, необходимо провести замену координат  $x_1 \leftrightarrow x_2$ . Теперь рассмотрим другой пример с формой, имеющей ранг, равный трём:  $A(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$ . Легко видеть, что соответствующая форма  $-A(\mathbf{x}) = -x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$  не может быть приведена к предыдущему каноническому виду для  $A(\mathbf{x})$  путём выделения общего знака и перестановки координат, поскольку имеет нечётный ранг, т.е. нечётное число ненулевых канонических коэффициентов. Наконец, рассмотрим форму второго ранга  $A(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$ , для которой  $-A(\mathbf{x}) = -x_1^2 - x_2^2$ . Видно, что в силу неравенства числа положительных (2) и отрицательных (0) канонических коэффициентов у формы  $A(\mathbf{x})$  произвести перестановку координат с целью совпадения канонического вида  $A(\mathbf{x})$  и  $-A(\mathbf{x})$  также не представляется возможным. Обобщение полученных результатов на пространства любой размерности и любые квадратичные формы, которые всегда можно привести к каноническому виду, не представляет затруднений. Таким образом, ответ на поставленный в условии задачи вопрос звучит так: квадратичная форма должна иметь чётный ранг и равное число положительных и отрицательных канонических коэффициентов.

### Задачи для самостоятельного решения.

14.1. При каких значениях параметра  $\lambda$  данная квадратичная форма является (а) положительно определённой и (б) отрицательно определённой?

1)  $A(\mathbf{x}) = -9x_1^2 + 6\lambda x_1 x_2 - x_2^2$ ;

2)  $A(\mathbf{x}) = 5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1 x_2 - 2x_1 x_3 - 2x_2 x_3$ ;

3)  $A(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 + 2x_1 x_3$ ;

4)  $A(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 - 2x_1 x_3 + 4x_2 x_3$ .

14.2. Пусть  $A(\mathbf{x})$  - квадратичная форма в пространстве  $R_n$ . Является ли подпространством  $R_n$  множество  $M$  векторов  $\mathbf{x} \in R_n$  таких, что



$A(\mathbf{x}) \geq 0$ ? Рассмотреть в качестве примера форму  
 $A(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$  в трёхмерном пространстве.

- 14.3. Дана невырожденная матрица  $C$  порядка  $n$ . Показать, что квадратичная форма с матрицей  $B = C^T C$  является положительно определённой.
- 14.4. Пусть квадратная матрица  $A$  является матрицей положительно определённой квадратичной формы. Показать, что обратная матрица  $A^{-1}$  также является матрицей положительно определённой квадратичной формы.

## Литература

1. Д.В. Беклемишев, *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры*, М., 2000.
2. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк, *Линейная алгебра*, М., 1984.
3. Л.А. Беклемишева, А.Ю. Петрович, И.А. Чубаров, *Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре*, М., 2003.
4. И.В. Проскуряков, *Сборник задач по линейной алгебре*, М., 2002.
5. Н.Ч. Крутицкая, А.А. Шишкин, *Линейная алгебра в примерах и задачах*, М., 1985.
6. *Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии*, под редакцией А.С. Феденко, Минск, 1999.
7. З.И. Боревич, *Определители и матрицы*, М., 1970.

## Содержание

	Стр.
Глава 1. Матрицы, определители и системы линейных уравнений	3
1. Матрицы	3
2. Определители. Ранг матрицы	7
3. Обратная матрица. Матричные уравнения	11
4. Системы линейных уравнений крамеровского типа	13
5. Системы однородных линейных уравнений	15
6. Системы неоднородных линейных уравнений	17
Глава 2. Линейные пространства	21
7. Определение линейного пространства. Базис и размерность	21
8. Подпространства линейных пространств	24
9. Евклидовы пространства	27
Глава 3. Линейные операторы	33
10. Определение и матричная запись линейных операторов	33
11. Задача о собственных значениях и собственных векторах	37
12. Линейные операторы в евклидовых пространствах	40
Глава 4. Билинейные и квадратичные формы	42
13. Матрица билинейной и квадратичной форм. Приведение к каноническому виду	43
14. Классификация квадратичных форм	46
Литература	50