МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского**

ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Часть 2

Рекомендовано методической комиссией факультета ВМК
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
010400 «Прикладная математика и информатика» и
010300 «Фундаментальная информатика и информационные технологии»

Нижний Новгород
2015

УДК 519.246
ББК 22.172
П80

П80 Практикум по теории вероятностей. Часть 2. Авторы: Пройдакова Е.В., Федоткин М.А., Зорин В.А.: Практикум. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 45 с.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент **Н.В. Кротов**

Практикум по теории вероятностей содержит необходимые теоретические сведения, разобранные примеры и задачи для самостоятельного решения темам «Двумерные непрерывные случайные величины», «Двумерные дискретные случайные величины», «Числовые характеристики двумерных случайных величин», «Функциональные зависимости от двумерных случайных величин», «Условные законы распределения случайных величин».

Практикум предназначен для студентов третьего курса и магистрантов первого года обучения факультета вычислительной математики и кибернетики, обучающихся по направлениям «Прикладная математика и информатика» и «Фундаментальная информатика и информационные технологии».

Ответственный за выпуск:
заместитель председателя методической комиссии
факультета ВМК ННГУ,
к.т.н., доцент **В.М. Сморкалова**

УДК 519.246
ББК 22.172

Оглавление

1. Двумерные непрерывные случайные величины

Занятие посвящено двумерным непрерывным случайным величинам и их законам распределения.

1.1. Краткие теоретические сведения

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathrm{P}(\bullet))$ есть основное вероятностное пространство произвольного статистически устойчивого эксперимента E.

Двумерной случайной величиной $(\xi(\omega), \eta(\omega)) : \Omega \to R^2$ называется упорядоченная система из одномерных случайных величин ξ и η, заданных на $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathrm{P}(\bullet))$.

При $(x, y) \in R^2$ **интегральной функцией распределения** $F_{\xi\eta}(x, y)$ двумерной случайной величины $(\xi, \eta(\omega))$ называется вероятность $\mathrm{P}(\{\omega : \xi(\omega) < x, \eta(\omega) < y\}) = F_{\xi\eta}(x, y)$. Ниже приведены свойства интегральной функции распределения $F_{\xi\eta}(x, y)$.

1. Функция $F_{\xi\eta}(x, y)$ принимает значение на отрезке $[0,1]$.

2. Функция $F_{\xi\eta}(x, y)$ является неубывающей функцией по каждому аргументу, т. е. если $a_2 > a_1$, то $F_{\xi\eta}(a_2, y) \ge F_{\xi\eta}(a_1, y)$ и если $b_2 > b_1$, то $F_{\xi\eta}(x, b_2) \ge F_{\xi\eta}(x, b_1)$.

3. $\mathrm{P}(a_1 \le \xi < a_2, \eta < y) = F_{\xi\eta}(a_2, y) - F_{\xi\eta}(a_1, y)$,

$\mathrm{P}(\xi < x, b_1 \le \eta < b_2) = F_{\xi\eta}(x, b_2) - F_{\xi\eta}(x, b_1)$.

4. Функция $F_{\xi\eta}(x, y)$ удовлетворяет предельным равенствам:

$$\lim_{x \to -\infty} F_{\xi\eta}(x, y) = \lim_{y \to -\infty} F_{\xi\eta}(x, y) = 0,$$

$$\lim_{\substack{x \to -\infty \\ y \to -\infty}} F_{\xi\eta}(x, y) = F_{\xi\eta}(-\infty, -\infty) = 0,$$

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F_{\xi\eta}(x, y) = F_{\xi\eta}(+\infty, +\infty) = 1,$$

$$\lim_{y \to +\infty} F_{\xi\eta}(x, y) = F_{\xi\eta}(x, +\infty) = F_{\xi}(x),$$

$$\lim_{x \to +\infty} F_{\xi\eta}(x, y) = F_{\xi\eta}(+\infty, y) = F_{\eta}(y),$$

где $F_{\xi}(x)=\mathrm{P}(\xi<x)$ и $F_{\eta}(y)=\mathrm{P}(\eta<y)$ – интегральные функции распределения одномерных случайных величин ξ и η.

5. Функция распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ непрерывна слева по каждому аргументу.

Вероятность попадания в прямоугольник двумерной случайной величины (ξ,η) вычисляется следующим образом:

$$\mathrm{P}(a_1\le\xi<b_1,a_2\le\eta<b_2)=F_{\xi\eta}(b_1,b_2)+F_{\xi\eta}(a_1,a_2)-F_{\xi\eta}(a_1,b_2)-F_{\xi\eta}(b_1,a_2).$$

Случайные величины ξ, η называются **статистически независимыми**, если для $(x,y)\in R^2$ имеем: $\mathrm{P}(\xi<y,\eta<y)=\mathrm{P}(\xi<y)\mathrm{P}(\eta<y)$ или $F_{\xi\eta}(x,y)=F_{\xi}(x)F_{\eta}(y)$. В противном случае случайные величины называются статистически зависимыми.

Двумерная случайная величина (ξ,η) **называется непрерывной**, если существует такая неотрицательная функция $f_{\xi\eta}(x,y)$ с областью определения R^2, что для любой области H двумерной плоскости, для которой существует площадь, имеет место равенство $\mathrm{P}\big((\xi,\eta)\in H\big)=\iint\limits_{H} f_{\xi\eta}(x,y)dxdy$, где неотрицательная функция $f_{\xi\eta}(x,y)$ называется **плотностью распределения** случайной величины (ξ,η). Для плотности распределения $f_{\xi\eta}(x,y)$ выполняется **условием нормировки**: $\mathrm{P}((\xi,\eta)\in R^2)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(x,y)dxdy=1.$

Для **интегральной функции распределения** непрерывной случайной величины (ξ,η) имеет место следующее выражение:

$$F_{\xi\eta}(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f_{\xi\eta}(u,v)dudv=\int\limits_{-\infty}^{y}(\int\limits_{-\infty}^{x} f_{\xi\eta}(u,v)du)dv=\int\limits_{-\infty}^{x}(\int\limits_{-\infty}^{y} f_{\xi\eta}(u,v)dv)du.$$

Для **плотности распределения** непрерывной с. в. (ξ,η), в свою очередь, выполняется соотношение: $f_{\xi\eta}(x,y)=\dfrac{\partial^2 F_{\xi\eta}(x,y)}{\partial x\partial y}$.

Для непрерывной случайной величины **вероятность попадания случайного вектора** в прямоугольник может быть вычислена по формуле:

$$\mathrm{P}(a_1\le\xi<a_2,b_1\le\eta<b_2)=\int\limits_{a_1}^{a_2}\int\limits_{b_1}^{b_2} f_{\xi\eta}(x,y)dxdy.$$

Если ξ и η являются **независимыми случайными величинами**, то выполняется: $F_{\xi\eta}(x,y) = F_\xi(x)\cdot F_\eta(y)$ и $f_{\xi\eta}(x,y) = f_\xi(x)\cdot f_\eta(y)$, где $F_\xi(x)$, $F_\eta(y)$ и $f_\xi(x)$, $f_\eta(y)$ - интегральные функции и плотности распределения соответственно одномерных случайных величин ξ и η.

Плотность распределения вероятностей $f_{\xi\eta}(x,y)$ непрерывной двумерной случайной величины (ξ,η) определяет **одномерные интегральные функции распределения случайных величин** ξ и η $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(u,v)du\right)dv$, $F_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{y}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(u,v)du\right)dv$ и **одномерные плотности вероятностей случайных величин** ξ и η $f_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(x,v)dv$, $f_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(u,y)du$.

1.2. Примеры решения задач

Пример 1.2.1. Плотность распределения случайной величины (ξ,η) имеет вид: $f_{\xi\eta}(x,y) = \dfrac{A}{(x^2+y^2+x^2y^2+1)}, -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$.

Найти константу A, интегральную функцию $F_{\xi\eta}(x,y)$ с. в. (ξ,η), одномерные плотности $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$, определить, независимы ли случайные величины ξ и η, вычислить вероятность попадания с. в. (ξ,η) в область $G = \{(x,y): -1 \le x \le 1; -1 \le y \le 1\}$.

Решение: Значение константы A найдем из условия нормировки:

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(x,y)dxdy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{A}{(x^2+y^2+x^2y^2+1)}dxdy =$$

$$= A\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)}dx = A\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(y^2+1)}dy\cdot\left(\operatorname{arctg}(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}\right) =$$

$$= A\pi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(y^2+1)}dy = A\pi\operatorname{arctg}(y)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = A\pi^2. \text{ Отсюда } A = \frac{1}{\pi^2}.$$

При $-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$ находим интегральную функцию распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ случайной величины (ξ,η):

$$F_{\xi\eta}(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{\xi\eta}(u,v)dudv=\int_{-\infty}^{y}(\int_{-\infty}^{x} f_{\xi\eta}(u,v)du)dv=\int_{-\infty}^{x}(\int_{-\infty}^{y} f_{\xi\eta}(u,v)dv)du=$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{\pi^2(u^2+v^2+u^2v^2+1)}dudv=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{y}dv\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{(u^2+1)(v^2+1)}du=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{(v^2+1)}dv\cdot(\operatorname{arctg}(u)\Big|_{-\infty}^{x})=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}(\operatorname{arctg}(x)+\frac{\pi}{2})\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{(y^2+1)}dy=\frac{1}{\pi^2}(\operatorname{arctg}(x)+\frac{\pi}{2})(\operatorname{arctg}(y)+\frac{\pi}{2}).$$

Далее определим одномерные плотности распределения. Для случайной величины ξ при $-\infty<x<+\infty$ находим:

$$f_{\xi}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi^2(x^2+y^2+x^2y^2+1)}dy=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi^2(x^2+1)(y^2+1)}dy=\frac{\pi}{\pi^2(x^2+1)}=\frac{1}{\pi(x^2+1)}.$$

Для случайной величины η при $-\infty<y<+\infty$ находим:

$$f_{\eta}(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(x,y)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi^2(x^2+y^2+x^2y^2+1)}dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi^2(x^2+1)(y^2+1)}dx=\frac{\pi}{\pi^2(y^2+1)}=\frac{1}{\pi(y^2+1)}.$$

Проверим условие статистической независимости для случайных величин ξ и η:

$$f_{\xi}(x)\cdot f_{\eta}(y)=\frac{1}{\pi(x^2+1)}\cdot\frac{1}{\pi(y^2+1)}=\frac{1}{\pi^2(x^2+1)(y^2+1)}=f_{\xi\eta}(x,y).$$

Значит с. в. ξ и η являются статистически независимыми.

Вычислим вероятность попадания двумерной случайной величины (ξ,η) в область $G=\{(x,y):-1\le x\le 1;-1\le y\le 1\}$ через плотность распределения $f_{\xi\eta}(x,y)$:

$$\mathrm{P}(-1\le\xi\le 1,-1\le\eta\le 1)=\mathrm{P}(-1\le\xi<1,-1\le\eta<1)=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f_{\xi\eta}(x,y)dxdy=$$

$$=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\pi^2(x^2+1)(y^2+1)}dxdy=\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{(y^2+1)}dy\int_{-1}^{1}\frac{1}{(x^2+1)}dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\pi^2(x^2+1)(y^2+1)}dxdy=\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{(y^2+1)}dy\cdot(\mathrm{arctg}x\big|_{-1}^{1})=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{(y^2+1)}dy\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{4}.$$

Ответ: $A=\frac{1}{\pi^2}$, интегральная функция распределения $F_{\xi\eta}(x,y)=\frac{1}{\pi^2}(\mathrm{arctg}(x)+\frac{\pi}{2})(\mathrm{arctg}(y)+\frac{\pi}{2})$, одномерные плотности вероятностей $f_{\xi}(x)=\frac{1}{\pi(x^2+1)}$ и $f_{\eta}(y)=\frac{1}{\pi(y^2+1)}$, случайные величины ξ и η являются статистически независимыми, $\mathrm{P}(-1\le\xi\le1,-1\le\eta\le1)=\frac{1}{4}$.

Пример 1.2.2. Определить вероятность попадания двумерной случайной величины (ξ,η) в область $G=\{(x,y):1\le x\le2;1\le y\le2\}$, если совместная функция распределения имеет следующий вид:

$$F_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}1-a^{-x^2}-a^{-2y^2}+a^{-x^2-2y^2}, & x,y>0;\\ 0, \text{ в остальных случаях,}\end{cases}$$

здесь $a>1$.

Решение: Для вычисления требуемой вероятности воспользуемся известной формулой:

$$\mathrm{P}(a_1\le\xi<b_1,a_2\le\eta<b_2)=F_{\xi\eta}(b_1,b_2)+F_{\xi\eta}(a_1,a_2)-F_{\xi\eta}(a_1,b_2)-F_{\xi\eta}(b_1,a_2).$$

Для нашего случая получаем:

$$\mathrm{P}(1\le\xi<2,1\le\eta<2)=F_{\xi\eta}(2,2)+F_{\xi\eta}(1,1)-F_{\xi\eta}(1,2)-F_{\xi\eta}(2,1)=$$

$$=(1-a^{-4}-a^{-8}+a^{-4-8})+(1-a^{-1}-a^{-2}+a^{-1-2})-$$

$$-(1-a^{-1}-a^{-8}+a^{-1-8})-(1-a^{-4}-a^{-2}+a^{-4-2})=$$

$$=-a^{-4}-a^{-8}+a^{-12}-a^{-1}-a^{-2}+a^{-3}+a^{-1}+a^{-8}-a^{-9}+a^{-4}+a^{-2}-a^{-6}=$$
$$=a^{-12}-a^{-9}-a^{-6}+a^{-3}.$$

Так как $a>1$, то получаем, что полученное выражение удовлетворяет неравенству $0<a^{-12}-a^{-9}-a^{-6}+a^{-3}<1$, т.е. может являться значением вероятности.

Ответ: $\mathrm{P}(1\le\xi<2,1\le\eta<2)=a^{-12}-a^{-9}-a^{-6}+a^{-3}$.

1.3. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.3.1. Случайный вектор (ξ,η) имеет равномерное распределение в квадрате R. Найти плотность вероятностей $f_{\xi\eta}(x,y)$ и интегральную функцию $F_{\xi\eta}(x,y)$ с. в. (ξ,η), частные плотности $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$, определить, зависимы ли случайные величины ξ и η.

Задача 1.3.2. Задана $f_{\xi\eta}(x,y)$ плотность распределения двумерной с. в. (ξ,η). Выразить через $f_{\xi\eta}(x,y)$ вероятности следующих событий: 1) $\{\xi>\eta\}$; 2) $\{\xi>|\eta|\}$; 3) $\{|\xi|>\eta\}$; 4) $\{\eta-\xi>1\}$.

Задача 1.3.3. Плотность распределения случайной величины (ξ,η) равна $f_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} c\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right), & x^2+y^2\le R^2; \\ 0, & x^2+y^2>R^2. \end{cases}$

Найти постоянную c, вычислить вероятность попадания с. в. (ξ,η) в круг радиуса $a<R$ с центром в начале координат.

Задача 1.3.4. Известна плотность распределения $f_{\xi\eta}(x,y)$ случайной величины (ξ,η)

$$f_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} A(x+y), & (x,y)\in G; \\ 0, & (x,y)\notin G, \end{cases}$$

где $G=\{(x,y):0\le x\le 1;0\le y\le 1\}$. Найти : а) постоянную A; б) совместную интегральную функцию распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$; в) частные плотности распределения $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$ случайных величин ξ и η.

Задача 1.3.5. Двумерная случайная величина (ξ,η) имеет плотность распределения

$$f_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} \lambda^2e^{-\lambda(x+y)}, & x,y>0, \\ 0, & x,y \text{ - другие}, \end{cases}$$

где $\lambda > 0$. Найти частные плотности распределения $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$ случайных величин ξ и η, определить, являются ли случайные величины ξ и η зависимыми.

Задача 1.3.6. Двумерная случайная величина (ξ,η) имеет плотность распределения $f_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} a\sin(x+y), \ 0<x,y\le\dfrac{\pi}{2}; \\ 0, \qquad x,y \text{ - другие.}\end{cases}$

Найти константу a, интегральную функцию $F_{\xi\eta}(x,y)$ с. в. (ξ,η) и частную плотность распределения $f_\xi(x)$ случайной величины ξ.

Задача 1.3.7. Двумерная случайная величина (ξ,η) имеет плотность распределения $f_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} kxy^2, \ 0<x<y<1, \\ 0, \qquad x,y \text{ - другие.}\end{cases}$

Найти: а) постоянную k; б) частные плотности распределения $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$ случайных величин ξ и η.

Задача 1.3.8. Двумерная случайная величина (ξ,η) имеет плотность распределения $f_{\xi\eta}(x,y)=\dfrac{A}{\pi^2(3+x^2)(1+y^2)}, -\infty<x<+\infty, -\infty<y<+\infty.$

Найти: а) постоянную A; б) совместную интегральную функцию распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$; в) вероятность $\mathrm{P}(0\le\xi\le1, 0\le\eta\le1)$.

Задача 1.3.9. Найти вероятность попадания двумерной случайной величины (ξ,η) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x=1, x=2, y=3, y=5$, если ее интегральная функция распределения имеет следующий вид: $F_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} 1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y}, \quad x,y>0; \\ 0, \ \text{в остальных случаях.}\end{cases}$

Задача 1.3.10. Совместное распределение случайных величин ξ и η является равномерным в круге $x^2+y^2\le1$. Вычислить вероятность $\mathrm{P}\left(|\xi|\le\dfrac{3}{4}, |\eta|\le\dfrac{3}{4}\right)$.

2. Двумерные дискретные случайные величины

Занятие посвящено двумерным дискретным случайным величинам и их законам распределения.

2.1. Краткие теоретические сведения

Двумерная случайная величина (ξ,η) **является дискретной**, если случайные величины ξ и η являются дискретными. Считаем, что каждая из случайных величин ξ, η принимает не более чем счётное число возможных значений.

Пусть с. в. ξ принимает значение из множества $X=\{x_1,x_2,...\}$ и η принимает значение из $Y=\{y_1,y_2,...\}$. Введем обозначение для вероятности $\mathrm{P}(\xi=x_i,\eta=y_j)=p_{ij}$. Множество $\{p_{ij}:i,j=1,2,...\}$ **является распределением двумерной дискретной случайной величины** (ξ,η). В частном случае распределение может принять вид $\{p_{ij}:i=1,2,...,n;\ j=1,2,...,m\}$. Для распределения двумерной случайной величины выполняется **свойство нормировки**: $\sum\limits_i\sum\limits_j p_{ij}=1$.

Для двумерной дискретной случайной величины (ξ,η) вводят понятие **таблицы или матрицы распределения**:

$\eta \backslash \xi$	x_1	…	x_i	…	x_n
y_1	p_{11}	…	p_{i1}	…	p_{n1}
…	…	…	…	…	…
y_j	p_{1j}	…	p_{ij}	…	p_{nj}
…	…	…	…	…	…
y_m	p_{1m}	…	p_{im}	…	p_{nm}

здесь $x_1<x_2<...<x_n$ и $y_1<y_2<...<y_m$.

Интегральная функция распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ **двумерной дискретной случайной величины** (ξ,η) принимает следующий вид:

$$F_{\xi\eta}(x,y)=\mathrm{P}\left(\xi<x,\eta<y\right)=\sum_{i:x_i<x}\ \sum_{j:y_j<y} p_{ij}\ .$$

Зная распределение $\{p_{ij}:i,j=1,2,...\}$ двумерной случайной величины (ξ,η) легко получить:

интегральные функции каждой из одномерных случайных величин ξ и η: $F_\xi(x)=F_{\xi\eta}(x,+\infty)=\sum\limits_{i:x_i<x}\mathrm{P}(\xi=x_i)=\sum\limits_{i:x_i<x}\sum\limits_j p_{ij}$,

$$F_\eta(y)=F_{\xi\eta}(+\infty,y)=\sum\limits_{j:y_j<y}\mathrm{P}(\eta=y_j)=\sum\limits_{j:y_j<y}\sum\limits_i p_{ij};$$

и **распределения каждой из одномерных случайных величин** ξ и η: $p_i=\mathrm{P}(\xi=x_i)=\sum\limits_j p_{ij}$ и $q_j=\mathrm{P}(\eta=y_j)=\sum\limits_i p_{ij}$.

Дискретные случайные величины ξ и η являются **статистически независимыми**, если выполняется условие:

$$\mathrm{P}(\xi=x_i,\eta=y_j)=\mathrm{P}(\xi=x_i)\cdot\mathrm{P}(\eta=y_j),\ i,j=1,2,\ldots$$

Если данное условие нарушается хотя бы один раз, то статистической независимости у случайных величин ξ и η нет.

2.2. Примеры решения задач

Пример 2.2.1. Задана матрица распределения двумерной случайной величины (ξ,η).

η \ ξ	6	12
-3	0,2	0,15
2,5	0,25	a

Найти неизвестный параметр a, построить совместную интегральную функцию распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ и частные интегральные функции распределения $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$.

Решение: Чтобы найти неизвестный параметр a воспользуемся свойством нормировки для распределения двумерной с. в. (ξ,η):

$$1=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}p_{ij}=0,2+0,15+0,25+a=0,6+a\ \Rightarrow\ a=1-0,6=0,4.$$

Далее последовательно находим интегральную функцию распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$, используя соотношение $F_{\xi\eta}(x,y)=\mathrm{P}(\xi<x,\eta<y)=$

$= \sum\limits_{i:x_i<x}\sum\limits_{j:y_j<y} p_{ij}$. Из условий задачи следует, что случайные величины ξ и η принимают по два возможных значения $\xi \in \{6;12\}$ и $\eta \in \{-3;2,5\}$.

При $x \le 6$ или при $y \le -3$, получаем: $F_{\xi\eta}(x,y) = \mathrm{P}(\xi < x, \eta < y) = 0$.

При $x \le 12$ и $y \le 2,5$, получаем: $F_{\xi\eta}(x,y) = \sum\limits_{i:x_i<x}\sum\limits_{j:y_j<y} p_{ij} = p_{11} = 0,2$.

При $x \le 12$ и $y \le +\infty$, получаем: $F_{\xi\eta}(x,y) = \sum\limits_{i:x_i<x}\sum\limits_{j:y_j<y} p_{ij} = \sum\limits_{j=1}^{2} p_{1j} =$
$= p_{11} + p_{12} = 0,2 + 0,25 = 0,45$.

При $x < +\infty$ и $y \le 2,5$, получаем: $F_{\xi\eta}(x,y) = \sum\limits_{i:x_i<x}\sum\limits_{j:y_j<y} p_{ij} = \sum\limits_{i=1}^{2} p_{i1} =$
$= p_{11} + p_{21} = 0,2 + 0,15 = 0,35$.

При $x < +\infty$ и $y \le +\infty$, получаем: $F_{\xi\eta}(x,y) = \sum\limits_{i:x_i<x}\sum\limits_{j:y_j<y} p_{ij} = \sum\limits_{i=1}^{2}\sum\limits_{j=1}^{2} p_{ij} =$
$= 0,2 + 0,25 + 0,15 + 0,4 = 1$.

Окончательно, интегральная функция распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ двумерной дискретной случайной величины (ξ,η) может быть представлена в виде таблицы:

y \ x	$(-\infty;6]$	$(6;12]$	$(12;+\infty)$
$(-\infty;-3]$	0	0	0
$(-3;2,5]$	0	0,2	0,35
$(2,5;+\infty)$	0	0,45	1

Частные интегральные функции распределения $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$ найдем из условий $F_\xi(x) = F_{\xi\eta}(x,+\infty)$ и $F_\eta(y) = F_{\xi\eta}(+\infty,y)$. В итоге получаем:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 6; \\ 0,45, & 6 < x \le 12; \\ 1, & x > 12. \end{cases} \qquad F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le -3; \\ 0,35, & -3 < y \le 2,5; \\ 1, & y > 2,5. \end{cases}$$

Пример 2.2.2. Матрица распределения двумерной случайной величины (ξ,η) имеет вид:

$\eta \backslash \xi$	-7	9
8	0,15	0,05
15	0,6	0,2

Выяснить, являются ли случайные величины ξ и η статистически независимыми.

Решение: Для того, чтобы проверить условие статистической независимости $\mathrm{P}(\xi=x_i,\eta=y_j)=\mathrm{P}(\xi=x_i)\cdot\mathrm{P}(\eta=y_j)$, $i,j=1,2,$ необходимо найти частные распределения для случайных величин ξ и η. Эти распределения легко найти по матрице распределения с. в. (ξ,η), используя следующие формулы: $p_i=\mathrm{P}(\xi=x_i)=\sum\limits_j p_{ij}$ и $q_j=\mathrm{P}(\eta=y_j)=\sum\limits_i p_{ij}$.

Для случайной величины ξ получаем следующее распределение:

$$p_1=\mathrm{P}(\xi=x_1)=\mathrm{P}(\xi=-7)=\sum_{j=1}^{2}p_{1j}=0{,}15+0{,}6=0{,}75;$$

$$p_2=\mathrm{P}(\xi=x_2)=\mathrm{P}(\xi=9)=\sum_{j=1}^{2}p_{2j}=0{,}05+0{,}2=0{,}25.$$

Для случайной величины η получаем следующее распределение:

$$q_1=\mathrm{P}(\eta=y_1)=\mathrm{P}(\eta=8)=\sum_{i=1}^{2}p_{i1}=0{,}15+0{,}05=0{,}2;$$

$$q_2=\mathrm{P}(\eta=y_2)=\mathrm{P}(\eta=15)=\sum_{i=1}^{2}p_{i2}=0{,}6+0{,}2=0{,}8.$$

Далее проверяем условие статистической независимости. Из таблицы распределения с. в. (ξ,η) имеем: $\mathrm{P}(\xi=x_1,\eta=y_1)=p_{11}=0{,}15$

С другой стороны, используя полученные распределения для с. в. ξ и η находим: $\mathrm{P}(\xi=x_1)\cdot\mathrm{P}(\eta=y_1)=p_1\cdot q_1=0{,}75\cdot 0{,}2=0{,}15$. Таким образом, получаем, что справедливо $\mathrm{P}(\xi=x_1,\eta=y_1)=\mathrm{P}(\xi=x_1)\cdot\mathrm{P}(\eta=y_1)$. Аналогично осуществляем оставшиеся проверки и в итоге получаем:

$$\mathrm{P}(\xi=x_1,\eta=y_2)=\mathrm{P}(\xi=x_1)\cdot\mathrm{P}(\eta=y_2),$$
$$\mathrm{P}(\xi=x_2,\eta=y_1)=\mathrm{P}(\xi=x_2)\cdot\mathrm{P}(\eta=y_1),$$
$$\mathrm{P}(\xi=x_2,\eta=y_2)=\mathrm{P}(\xi=x_2)\cdot\mathrm{P}(\eta=y_2).$$

То есть условие статистической независимости выполняется для всех $i,j=1,2$ и случайные величины. ξ и η **статистически независимы**.

2.3. Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.3.1. Задана матрица распределения двумерной случайной величины (ξ,η).

η \ ξ	2	9
-1	a	0,06
1,5	0,24	0,5

Найти неизвестный параметр a, построить совместную интегральную функцию распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ и частные интегральные функции распределения $F_{\xi}(x)$ и $F_{\eta}(y)$.

Задача 2.3.2. Матрица распределения с. в. (ξ,η) имеет вид:

η \ ξ	0	1	2
-1	0,2	0,17	0,1
2	0,25	a	0,03

Найти неизвестный параметр a, построить совместную интегральную функцию распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ и частные интегральные функции распределения $F_{\xi}(x)$ и $F_{\eta}(y)$.

Задача 2.3.3. В урне 5 шаров: 3 белых и 2 черных. Производится две последовательных выборки без возвращения каждый раз по два шара. Определены две случайные величины ξ - число белых шаров в первой выборке и η - число белых шаров во второй выборке. Построить совместную интегральную функцию распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$.

Задача 2.3.4. В ящике 6 шаров, на двух из них написана цифра «1» и на четырех написана цифра «2». Один за другим без возвращения наудачу вынимают два шара. Найти совместное распределение двумерной случайной величины (ξ,η), где с. в. ξ - цифра на первом извлеченном шаре, а с. в. η - цифра на втором извлеченном шаре.

Задача 2.3.5. В кошельке лежат 8 пятирублевых монет и 6 двухрублевых. Наудачу без возвращения одну за другой вынимают две монеты. Найти совместное распределение случайной величины (ξ,η), где с. в. ξ - достоинство первой монеты, а с. в. η - достоинство второй монеты.

Задача 2.3.6. Из 12 лотерейных билетов 4 выигрышных. Двое вытягивают по билету, сначала тянет первый игрок, затем второй. Определены две случайные величины ξ - число выигрышных билетов у первого игрока и η - число выигрышных билетов у второго игрока. Построить совместную интегральную функцию распределения $F_{\xi\eta}(x, y)$.

Задача 2.3.7. Двое стрелков производят по два выстрела. Стреляют они независимо друг от друга, причем каждый выстрел не зависит от предыдущего. Вероятность попадания первого стрелка при одном выстреле равна p_1, второго – p_2. Определены две случайные величины ξ - число попаданий первого стрелка, η - число попаданий второго стрелка. Найти совместное распределение двумерной случайной величины (ξ,η).

Задача 2.3.8. Матрица распределения двумерной случайной величины (ξ,η) имеет вид:

$\eta \backslash \xi$	-1	0	1
0	0,1	0,15	0,2
3	0,15	0,25	0,15

Найти интегральную функцию распределения $F_{\xi\eta}(x, y)$ двумерной случайной величины (ξ,η) и частные ряды распределения с. в. ξ и η.

Задача 2.3.9. Задана матрица распределения двумерной случайной величины (ξ,η).

$\eta \backslash \xi$	-1	2	5
0	0,1	0,2	0,1
11	0,3	0,25	0,05

Найти все частные законы распределения с. в ξ и η и проверить эти случайные величины на статистическую независимость.

Задача 2.3.10. Матрица распределения с. в. (ξ,η) имеет вид:

$\eta \backslash \xi$	6	12
-3	0,07	a
2,5	0,43	0,13

Найти неизвестный параметр a и выяснить, являются ли случайные величины ξ и η статистически независимыми.

3. Числовые характеристики двумерных случайных величин

Занятие посвящено числовым характеристикам многомерных случайных величин.

3.1. Краткие теоретические сведения

Напомним, что многомерной случайной величиной $(\xi_1(\omega),\xi_2(\omega),...,\xi_n(\omega))$ является упорядоченной системой из n одномерных случайных величин $\xi_1(\omega),\xi_2(\omega),...,\xi_n(\omega)$, заданных на одном вероятностном пространстве $(\Omega,\mathfrak{F},\mathrm{P}(\bullet))$. Отображение вида $(\xi_1(\omega),\xi_2(\omega),...,\xi_n(\omega)):\Omega\to R^n$ и совместная интегральная функция распределения являются полными и исчерпывающими характеристиками n-мерной случайной величины. Однако, эти характеристики, как правило, являются сложными и громоздкими математическими объектами, поэтому на практике часто используют числовые характеристики многомерной случайной величины, позволяющие приближенно описывать наиболее существенные особенности её законов распределения. Ниже остановимся на наиболее важных числовых характеристиках, таких как, математическое ожидание, дисперсия и корреляционные моменты.

Далее, для простоты будем рассматривать случай n = 2, т.е. двумерную случайную величину (ξ,η).

Математическим ожиданием $\mathrm{M}(\xi,\eta)$ **двумерной случайной величины** (ξ,η) является точка двухмерного пространства R^2 вида $(\mathrm{M}\xi,\mathrm{M}\eta)$, где величины $\mathrm{M}\xi$ и $\mathrm{M}\eta$ – это математические ожидания одномерных случайных величин ξ и η соответственно.

Предположим, что известно распределение $\{p_{ij}:i,j=1,2,...\}$ **двумерной дискретной случайной величины** (ξ,η), где $p_{ij}=\mathrm{P}(\xi=x_i,\eta=y_j)$ и $\xi\in\{x_1,x_2,...\}$, $\eta\in\{y_1,y_2,...\}$. Пусть задана еще и случайная величина $\varsigma=g(\xi,\eta)$, где $g(x,y):R^2\to R$ - однозначное отображение. Тогда **математическое ожидание случайной величины** $\varsigma=g(\xi,\eta)$ вычисляется следующим образом:

$\mathrm{M}\varsigma=\mathrm{M}g(\xi,\eta)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$, если (ξ,η) - дискретная случайная величина и задано ее распределение $\{p_{ij}:i,j=1,2,...\}$;

$\mathrm{M}\varsigma=\mathrm{M}g(\xi,\eta)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f_{\xi\eta}(x,y)dxdy$, если (ξ,η) - непрерывная случайная величина и задана ее плотность $f_{\xi\eta}(x,y)$.

Математическое ожидание и дисперсия каждой из одномерных дискретных случайных величин ξ и η будет вычисляться по формулам:

$$\mathrm{M}\xi=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}x_i p_{ij} \text{ и } \mathrm{M}\eta=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}y_j p_{ij};$$

$$\mathrm{D}\xi=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(x_i-\mathrm{M}\xi)^2 p_{ij} \text{ и } \mathrm{D}\eta=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}(y_j-\mathrm{M}\eta)^2 p_{ij}.$$

Предположим, что задана плотность распределения $f_{\xi\eta}(x,y)$ **двумерной непрерывной случайной величины** (ξ,η). Тогда **математическое ожидание и дисперсия каждой из одномерных непрерывных случайных величин** ξ и η будет вычисляться по формулам:

$$\mathrm{M}\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x f_{\xi\eta}(x,y)dxdy \text{ и } \mathrm{M}\eta=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y f_{\xi\eta}(x,y)dxdy;$$

$$\mathrm{D}\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mathrm{M}\xi)^2 f_{\xi\eta}(x,y)dxdy \text{ и } \mathrm{D}\eta=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(y-\mathrm{M}\eta)^2 f_{\xi\eta}(x,y)dxdy.$$

Корреляционным моментом или ковариацией $\mathrm{cov}(\xi,\eta)$ **случайных величин** ξ и η, при $|\mathrm{M}\xi|<\infty$ и $|\mathrm{M}\eta|<\infty$ называется математическое ожидание произведения отклонений этих случайных величин от их математического ожидания, т. е. $\mathrm{cov}(\xi,\eta)=\mathrm{M}[(\xi-\mathrm{M}\xi)(\eta-\mathrm{M}\eta)]$.

Если (ξ,η) **дискретная двумерная случайная величина** и задано ее распределение $\{p_{ij}: i,j=1,2,...\}$, где $p_{ij}=\mathrm{P}(\xi=x_i,\eta=y_j)$, то ковариация $\mathrm{cov}(\xi,\eta)$ вычисляется по формуле $\mathrm{cov}(\xi,\eta)=\sum\limits_{i,j}(x_i-\mathrm{M}\xi)(y_j-\mathrm{M}\eta)p_{ij}$.

Две случайные величины **называются некоррелированными**, если их корреляционный момент равен нулю $(\mathrm{cov}(\xi,\eta)=0)$. Иначе эти величины называются коррелированными.

Если (ξ,η) - **непрерывная двумерная случайная величина** с заданной плотностью распределения $f_{\xi\eta}(x,y)$, то ковариация $\mathrm{cov}(\xi,\eta)$ вычисляется по формуле:

$$\mathrm{cov}(\xi,\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mathrm{M}\xi)(y-\mathrm{M}\eta)f_{\xi\eta}(x,y)dxdy.$$

Свойства ковариации:

- $\mathrm{cov}(\xi,\eta)=\mathrm{cov}(\eta,\xi)$;
- $\mathrm{cov}(\xi,\xi)=\mathrm{D}\xi$, $\mathrm{cov}(\eta,\eta)=\mathrm{D}\eta$;

- если для случайных величин ξ и η существует величина $\operatorname{cov}(\xi,\eta)$, то $\mathrm{M}(\xi\cdot\eta)=\mathrm{M}\xi\cdot\mathrm{M}\eta+\operatorname{cov}(\xi,\eta)$, или $\operatorname{cov}(\xi,\eta)=\mathrm{M}(\xi\cdot\eta)-\mathrm{M}\xi\cdot\mathrm{M}\eta$;

- если для случайных величин ξ и η существует величина $\operatorname{cov}(\xi,\eta)\neq-\infty$, то $\mathrm{D}(\xi+\eta)=\mathrm{D}\xi+\mathrm{D}\eta+2\operatorname{cov}(\xi,\eta)$;

- если случайные величины $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ являются попарно некоррелированными, то $\mathrm{D}(\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{D}\xi_i$ и $\mathrm{M}(\prod\limits_{i=1}^{n}\xi_i)=\prod\limits_{i=1}^{n}\mathrm{M}\xi_i$.

Коэффициентом корреляции $\operatorname{corr}(\xi,\eta)$ **случайных величин** ξ и η при $0<\sigma(\xi)<\infty$ и $0<\sigma(\eta)<\infty$ называется отношение ковариации к произведению их средних квадратических отклонений, т. е. $\operatorname{corr}(\xi,\eta)=\dfrac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sigma(\xi)\cdot\sigma(\eta)}$.

Рассеивание n-мерной случайной величины $\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ нельзя охарактеризовать вектором $(\mathrm{D}\xi_1,\mathrm{D}\xi_2,...,\mathrm{D}\xi_n)$ из дисперсий случайных величин $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$, так как разброс должен измеряться некоторым неотрицательным числом.

Дисперсию $\mathrm{D_b}(\xi)$ **многомерной случайной величины** ξ можно определить в направлении произвольного единичного вектора $\mathrm{b}=(b_1,b_2,...,b_n)$, где $(b_1)^2+(b_2)^2+...+(b_n)^2=1$. Проекция $\varphi(\xi,\mathrm{b})$ многомерной случайной величины ξ на направление, определяемое вектором b равна $\varphi(\xi,\mathrm{b})=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k\xi_k$. Для дисперсии случайной величины $\varphi(\xi,\mathrm{b})$ имеет место соотношение: $\mathrm{D}\varphi(\xi,\mathrm{b})=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}b_ib_j\operatorname{cov}(\xi_i,\xi_j)$.

При выбранном направлении единичного вектора b **дисперсия** $\mathrm{D_b}(\xi)$ **многомерной случайной величины** $\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ равна дисперсии $\mathrm{D}\varphi(\xi,\mathrm{b})$ случайной величины $\varphi(\xi,\mathrm{b})$, т. е.

$$\mathrm{D_b}(\xi)=\mathrm{D}\varphi(\xi,\mathrm{b})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_ib_j\operatorname{cov}(\xi_i,\xi_j).$$

Итак, дисперсию $\mathrm{D_b}(\xi)$ можно вычислить через элементы $k_{ij}, i,j=\overline{1,n}$ **ковариационной (корреляционной) матрицы** $\mathrm{K}(\xi)$, см. рис. 3.1.

$$\mathrm{K}(\xi) = \begin{pmatrix} \mathrm{cov}(\xi_1, \xi_1) & \mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2) & \dots & \mathrm{cov}(\xi_1, \xi_n) \\ \mathrm{cov}(\xi_2, \xi_1) & \mathrm{cov}(\xi_2, \xi_2) & \dots & \mathrm{cov}(\xi_2, \xi_n) \\ . & . & . & \\ \mathrm{cov}(\xi_n, \xi_1) & \mathrm{cov}(\xi_n, \xi_2) & \dots & \mathrm{cov}(\xi_n, \xi_n) \end{pmatrix}$$

Рис. 3.1

Матрица $\mathrm{K}(\xi)$ является симметричной и неотрицательно определенной. В том случае, когда компоненты n-мерной случайной величины попарно некоррелированы, ковариационная матрица будет диагональной и $k_{ij} = \mathrm{cov}(\xi_i, \xi_i) = D\xi_i, i = \overline{1,n}$. Отсюда получаем: $\mathrm{D_b}(\xi) = (b_1)^2 \mathrm{D}\xi_1 + (b_2)^2 \mathrm{D}\xi_2 + \ldots + (b_n)^2 \mathrm{D}\xi_n$.

3.2. Примеры решения задач

Пример 3.2.1. Дискретная случайная величина (ξ, η) задана таблицей распределения:

$\eta \backslash \xi$	0	1	2	3
0	1/8	0	0	0
1	1/4	1/8	0	0
2	1/6	1/6	1/24	0
3	1/27	1/18	1/36	1/216

Требуется найти $\mathrm{M}\xi$, $\mathrm{M}\eta$, $\mathrm{D}\xi$, $\mathrm{D}\eta$, $\mathrm{M}(\xi+\eta)$ и построить ковариационную матрицу.

Решение: Для того, чтобы вычислить $\mathrm{M}\xi$, $\mathrm{M}\eta$, $\mathrm{D}\xi$, $\mathrm{D}\eta$, найдем сначала частные распределения ξ и η, используя формулы $p_i = \mathrm{P}(\xi = x_i) = \sum\limits_j p_{ij}$ и $q_j = \mathrm{P}(\eta = y_j) = \sum\limits_i p_{ij}$, где $p_{ij} = \mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = y_j)$.

Для случайной величины ξ ряд распределения имеет вид:

$\xi = x_i$	0	1	2	3
$\mathrm{P}(\xi = x_i)$	125/216	75/216	15/216	1/216

Для случайной величины η ряд распределения имеет вид:

$\eta = y_j$	0	1	2	3
$\mathrm{P}(\eta = y_j)$	27/216	81/216	81/216	27/216

Вычисляем математические ожидания и дисперсии случайных величин ξ и η:

$$\mathrm{M}\xi = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 0 \cdot \frac{125}{216} + 1 \cdot \frac{75}{216} + 2 \cdot \frac{15}{216} + 3 \cdot \frac{1}{216} = \frac{108}{216};$$

$$\mathrm{M}\eta = \sum_{j=1}^{4} y_j q_j = 0 \cdot \frac{27}{216} + 1 \cdot \frac{81}{216} + 2 \cdot \frac{81}{216} + 3 \cdot \frac{27}{216} = \frac{324}{216} = \frac{3}{2};$$

$$\mathrm{M}\xi^2 = \sum_{i=1}^{4} x_i{}^2 p_i = 0^2 \cdot \frac{125}{216} + 1^2 \cdot \frac{75}{216} + 2^2 \cdot \frac{15}{216} + 3^2 \cdot \frac{1}{216} = \frac{144}{216} = \frac{2}{3};$$

$$\mathrm{M}\eta^2 = \sum_{j=1}^{4} y_j{}^2 q_j = 0^2 \cdot \frac{27}{216} + 1^2 \cdot \frac{81}{216} + 2^2 \cdot \frac{81}{216} + 3^2 \cdot \frac{27}{216} = \frac{648}{216} = 3;$$

$$\mathrm{D}\xi = \mathrm{M}(\xi^2) - (\mathrm{M}\xi)^2 = \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{12};$$

$$\mathrm{D}\eta = \mathrm{M}(\eta^2) - (\mathrm{M}\eta)^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

Для вычисления $\mathrm{M}(\xi + \eta)$ воспользуемся свойствами математического ожидания: $\mathrm{M}(\xi + \eta) = \mathrm{M}\xi + \mathrm{M}\eta = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1.$

Далее строим ковариационную матрицу, для этого воспользуемся свойствами ковариации:

$$\mathrm{cov}(\xi, \xi) = \mathrm{D}\xi = \frac{5}{12};$$

$$\mathrm{cov}(\eta, \eta) = \mathrm{D}\eta = \frac{3}{4};$$

$$\mathrm{cov}(\xi, \eta) = \mathrm{cov}(\eta, \xi) = \mathrm{M}(\xi \cdot \eta) - \mathrm{M}\xi \cdot \mathrm{M}\eta.$$

Для вычисления $\mathrm{M}(\xi \cdot \eta)$ воспользуемся следующей формулой:

$$\mathrm{M}g(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}\text{, здесь } g(x,y)=x\cdot y.$$

$$\mathrm{M}(\xi\cdot\eta)=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}x_iy_j\mathrm{P}(\xi=x_i,\eta=y_j)=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}x_iy_jp_{ij}=x_1y_1p_{11}+x_1y_2p_{12}+$$

$$+x_1y_3p_{13}+x_1y_4p_{14}+x_2y_1p_{21}+x_2y_2p_{22}+x_2y_3p_{23}+x_2y_4p_{24}+x_3y_1p_{31}+$$
$$+x_3y_2p_{32}+x_3y_3p_{33}+x_3y_4p_{34}+x_4y_1p_{41}+x_4y_2p_{42}+x_4y_3p_{43}+x_4y_4p_{44}=$$
$$=0\cdot0\cdot\frac{1}{8}+0\cdot1\cdot\frac{1}{4}+0\cdot2\cdot\frac{1}{6}+0\cdot3\cdot\frac{1}{27}+1\cdot0\cdot0+1\cdot1\cdot\frac{1}{8}+1\cdot2\cdot\frac{1}{6}+1\cdot3\cdot\frac{1}{18}+$$
$$+2\cdot0\cdot0+2\cdot1\cdot0+2\cdot2\cdot\frac{1}{24}+2\cdot3\cdot\frac{1}{36}+3\cdot0\cdot0+3\cdot1\cdot0+3\cdot2\cdot0+$$
$$+3\cdot3\cdot\frac{1}{216}=\frac{24}{24}=1.$$

Отсюда $\operatorname{cov}(\xi,\eta)=\operatorname{cov}(\eta,\xi)=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{4}.$

Окончательно ковариационная матрица имеет вид:

$$\mathrm{K}(\xi,\eta)=\begin{pmatrix}\operatorname{cov}(\xi,\xi) & \operatorname{cov}(\xi,\eta)\\ \operatorname{cov}(\xi,\eta) & \operatorname{cov}(\eta,\eta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{12} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathrm{K}(\xi,\eta)$ получилась симметричной. Проверим, является ли она неотрицательно определенной. Вычисляем определитель: $\frac{5}{12}\cdot\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{14}{48}-\frac{3}{48}=\frac{1}{4}>0$.

Ответ: $\mathrm{M}\xi=\frac{108}{216}$, $\mathrm{M}\eta=\frac{3}{2}$, $\mathrm{D}\xi=\frac{5}{12}$, $\mathrm{D}\eta=\frac{3}{4}$, $\mathrm{M}(\xi+\eta)=1$,

$$\mathrm{K}(\xi,\eta)=\begin{pmatrix}\frac{5}{12} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}.$$

Пример 3.2.2. Случайные величины ξ и η независимы. Известно, что с. в. ξ является $(1,2)$ - нормальной, а с. в. η распределена равномерно на отрезке $[0,2]$. Требуется вычислить $\mathrm{M}\xi$, $\mathrm{M}\eta$, $\mathrm{M}(\xi,\eta)$, $\mathrm{M}(\xi-\eta)$, $\mathrm{D}(\xi-\eta)$, $\mathrm{co}rr(\xi,\eta)$ и построить ковариационную матрицу.

Решение: Так как вид распределения для случайных величин ξ и η известен, то можно записать выражения для плотностей распределения:

$$f_\xi(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-1)^2}{8}\right\}, -\infty<x<+\infty \text{ и}$$

$$f_\eta(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & y\in[0,2];\\ 0 & y\notin[0,2].\end{cases}$$

Причем можно воспользоваться готовыми формулами для нахождения математических ожиданий и дисперсий случайных величин ξ и η:

$$\mathrm{M}\xi=1,\ \mathrm{D}\xi=2^2=4,$$

$$\mathrm{M}\eta=\frac{2-0}{2}=1,\ \mathrm{D}\eta=\frac{(2-0)^2}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3},$$

$$\mathrm{M}(\xi,\eta)=(\mathrm{M}\xi,\mathrm{M}\eta)=(1,1).$$

Для нахождения $\mathrm{M}(\xi-\eta)$ и $\mathrm{D}(\xi-\eta)$ воспользуемся свойствами математического ожидания и дисперсии.

$$\mathrm{M}(\xi-\eta)=\mathrm{M}\xi-\mathrm{M}\eta=1-1=0,$$

$\mathrm{D}(\xi-\eta)=\mathrm{M}(\xi-\eta)^2-\left(\mathrm{M}(\xi-\eta)\right)^2$. Вычислим $\mathrm{M}(\xi-\eta)^2$:

$$\mathrm{M}(\xi-\eta)^2=\mathrm{M}(\xi^2-2\xi\eta+\eta^2)=\mathrm{M}\xi^2-2\mathrm{M}\xi\cdot\mathrm{M}\eta+\mathrm{M}\eta^2.$$

$\mathrm{D}\xi=\mathrm{M}(\xi^2)-(\mathrm{M}\xi)^2$, отсюда $\mathrm{M}(\xi^2)=(\mathrm{M}\xi)^2+\mathrm{D}\xi=4+1^2=5$, аналогично $\mathrm{M}(\eta^2)=(\mathrm{M}\eta)^2+\mathrm{D}\eta=1^2+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$.

Отсюда находим, что $\mathrm{M}(\xi-\eta)^2=5-2\cdot1\cdot1+\frac{4}{3}=\frac{13}{3}$. Теперь можно вычислить дисперсию $\mathrm{D}(\xi-\eta)=\frac{13}{3}-0^2=\frac{13}{3}$.

Строим ковариационную матрицу, используя свойства ковариации:

$$\mathrm{cov}(\xi,\xi)=\mathrm{D}\xi=4;\quad \mathrm{cov}(\eta,\eta)=\mathrm{D}\eta=\frac{1}{3};$$

$\mathrm{cov}(\xi,\eta)=\mathrm{cov}(\eta,\xi)=\mathrm{M}(\xi\cdot\eta)-\mathrm{M}\xi\cdot\mathrm{M}\eta=0$, так как случайные величины ξ и η независимые.

$$\mathrm{K}(\xi,\eta)=\begin{pmatrix}\mathrm{cov}(\xi,\xi) & \mathrm{cov}(\xi,\eta)\\ \mathrm{cov}(\xi,\eta) & \mathrm{cov}(\eta,\eta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathrm{K}(\xi,\eta)$ получилась симметричной и положительно определенной. Вычислим коэффициент корреляции $\mathrm{co}rr(\xi,\eta)$:

$$\mathrm{co}rr(\xi,\eta)=\frac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{\sigma(\xi)\cdot\sigma(\eta)}=\frac{0}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}}=0.$$

Ответ: $\mathrm{M}\xi=1$, $\mathrm{M}\eta=1$, $\mathrm{M}(\xi,\eta)=(1{,}1)$, $\mathrm{M}(\xi-\eta)=0$, $\mathrm{D}(\xi-\eta)=\frac{13}{3}$, $\mathrm{K}(\xi,\eta)=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$, $\mathrm{co}rr(\xi,\eta)=0$.

Пример 3.2.3. Какие из приведенных ниже матриц могут, а какие не могут быть ковариационными для случайного вектора (ξ_1,ξ_2,ξ_3):

1) $\mathrm{K}_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 2) $\mathrm{K}_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$?

Решение: Проверим, являются ли данные матрицы симметричными и неотрицательно определенными.

1) Матрица $\mathrm{K}_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ симметричная. Проверим неотрицательную определенность. Вычислим главные миноры:

$1-0=1>0,$

$1-0=1>0,$

$1+0+0-0-0-0=1>0.$

Главные миноры положительные, следовательно, матрица является положительно определенной. Значит, матрица $\mathrm{K}_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ может являться ковариационной.

2) Матрица $\mathrm{K}_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ также является симметричной. Вычислим главные миноры:

$0-1=-1<0,$

$0-1=-1<0,$

$0+1+1-0-0-0=2>0.$

Условие неотрицательной определенности нарушено, так как существует отрицательный главный минор, следовательно, матрица $K_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ не может являться ковариационной.

Ответ: 1) да, 2) нет.

3.3. Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.3.1. Какие из приведенных ниже матриц могут, а какие не могут быть ковариационными для случайного вектора (ξ_1,ξ_2,ξ_3):

1) $K_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, 2) $K_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$?

Задача 3.3.2. Какие из приведенных ниже матриц могут, а какие не могут быть ковариационными для случайного вектора (ξ_1,ξ_2,ξ_3):

1) $K_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{pmatrix}$, 2) $K_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}2&2&3\\2&4&4\\3&4&5\end{pmatrix}$?

Задача 3.3.3. При каких значениях x существует случайный вектор (ξ_1,ξ_2,ξ_3) с ковариационной матрицей $\begin{pmatrix}1&x&x\\x&1&x\\x&x&1\end{pmatrix}$?

Задача 3.3.4. При каких значениях x существует случайный вектор (ξ_1,ξ_2,ξ_3) с ковариационной матрицей $\begin{pmatrix}1&x&-x\\x&1&x\\-x&x&1\end{pmatrix}$?

Задача 3.3.5. Дискретная случайная величина (ξ,η) задана таблицей распределения:

η \ ξ	2	5	8
0,4	0,15	0,3	0,35
0,8	0,05	0,12	0,03

Найти $D\xi$, $D\eta$, $M(\xi,\eta)$, $M(\xi\cdot\eta)$ и построить ковариационную матрицу.

Задача 3.3.6. Распределение случайного вектора (ξ,η) задано таблицей:

$\eta \backslash \xi$	3	6
10	0,25	0,1
14	0,15	0,05
18	0,32	0,13

Найти $\mathrm{D}\xi$, $\mathrm{D}\eta$, $\mathrm{M}(\xi,\eta)$ и $\mathrm{cov}(\xi,\eta)$, $\mathrm{corr}(\xi,\eta)$.

Задача 3.3.7. Известно, что двумерная случайной величины (ξ,η) является нормальной, причем $\mathrm{M}\xi=-2$, $\mathrm{M}\eta=3$ и матрица ковариации имеет вид $\mathrm{K}(\xi,\eta)=\begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 25 \end{pmatrix}$. Привести выражение для плотности распределения с. в. (ξ,η).

Задача 3.3.8. Двумерная случайная величина подчинена закону распределения с плотностью $f_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} Axy, & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D \end{cases}$, где $D=\{(x,y): x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$. Найти $A, \mathrm{M}\xi$, $\mathrm{M}\eta$, $\mathrm{D}\xi$, $\mathrm{D}\eta$, $\mathrm{cov}(\xi,\eta)$, $\mathrm{corr}(\xi,\eta)$.

Задача 3.3.9. Случайные величины ξ и η независимы и равномерно распределены на отрезке $[0,1]$. Найти $\mathrm{M}(\xi,\eta)$, $\mathrm{M}(\xi-\eta)^2$ и построить ковариационную матрицу $\mathrm{K}(\xi,\eta)$.

Задача 3.3.10. Случайные величины ξ и η независимы и имеют нормальное распределение, причем $\mathrm{M}\xi=\mathrm{M}\eta=0$, $\mathrm{D}\xi=4$, $\mathrm{D}\eta=9$. Вычислить $\mathrm{cov}(\xi,\eta)$, $\mathrm{corr}(\xi,\eta)$, $\mathrm{M}(\xi-\eta)$, $\mathrm{D}(\xi-\eta)$.

4. Функциональные зависимости двумерных случайных величин

Занятие посвящено функциональной зависимости от двумерных случайных величин.

4.1. Краткие теоретические сведения

Практическое занятие 5 было посвящено неслучайным функциям от одномерных случайных величин, на данном практическом занятие эта же тема рассматривается в контексте *n*-мерных случайных величин. Далее будем рассматривать самый простой случай $n = 2$. Теоретические сведения для общего случая приведены в [1] и [2].

Пусть на основном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathrm{P}(\bullet))$ определена двумерная случайная величина (ξ_1, ξ_2) с интегральной функцией распределения $F_{\xi_1\xi_2}(x, y) = \mathrm{P}(\xi_1 < x, \xi_2 < y)$ и задано измеримое отображение $g(x, y): R^2 \to R$. На том же пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathrm{P}(\bullet))$ вводится в рассмотрение одномерная случайная величина вида $\eta = g(\xi_1, \xi_2)$ с интегральной функцией распределения $F_\eta(z) = \mathrm{P}(\eta < z) = \mathrm{P}(g(x, y) < z), -\infty < z < +\infty$.

Допустим, (ξ_1, ξ_2) является **двумерной дискретной случайной величиной** с распределением $\mathrm{P}(\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j) = p_{ij}, i, j = 1, 2, \ldots,$ где случайная величина ξ_1 принимает значение из счетного множества $\{x_1, x_2, \ldots\}$ и с. в. ξ_2 принимает значение из множества $\{y_1, y_2, \ldots\}$. Тогда **интегральная функция распределения** $F_\eta(z)$ случайной величины $\eta = g(\xi_1, \xi_2)$ определяется следующим образом:

$F_\eta(z) = \mathrm{P}(\eta < z) = \mathrm{P}(g(\xi_1, \xi_2) < z) = \sum\limits_{i, j : (x_i, y_j) \in \mathrm{B}^2} p_{ij}$, где B^2 - борелевская σ-алгебра в R^2 и $\mathrm{B}^2 = \{(x_i, y_j) : g(x_i, y_j) < z\}, -\infty < z < +\infty$.

Если (ξ_1, ξ_2) является **двумерной непрерывной случайной величиной** с плотностью распределения $f_{\xi_1\xi_2}(x, y), -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$ то **интегральная функция распределения** $F_\eta(z)$ с. в. $\eta = g(\xi_1, \xi_2)$ вычисляется следующим образом:

$F_\eta(z) = \mathrm{P}(\eta < z) = \mathrm{P}(g(\xi_1, \xi_2) < z) = \iint\limits_{\mathrm{B}^2} f_{\xi_1\xi_2}(x, y)dxdy$, где B^2 - также является борелевской σ-алгеброй в R^2 и $\mathrm{B}^2 = \{(x, y) : g(x, y) < z\}, -\infty < z < +\infty$.

Рассмотрим отдельно ситуацию, когда **случайная величина** $\eta = \xi_1 + \xi_2$ и известна плотность распределения $f_{\xi_1 \xi_2}(x, y)$ двумерной случайной величины (ξ_1, ξ_2). Тогда **интегральная функция распределения** $F_\eta(z)$ **с. в.** η будет определяться соотношением:

$$F_\eta(z) = \mathrm{P}(\xi_1 + \xi_2 < z) = \iint\limits_{\mathrm{B}^2(z)=\{(x,y): x+y<z\}} f_{\xi_1\xi_2}(x, y)dxdy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int\limits_{-\infty}^{z-x} f_{\xi_1\xi_2}(x, y)\,dy \Big) dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int\limits_{-\infty}^{z-y} f_{\xi_1\xi_2}(x, y)\,dx \Big) dy.$$

Область $\mathrm{B}^2(z)$ изображена на рис. 4.1.

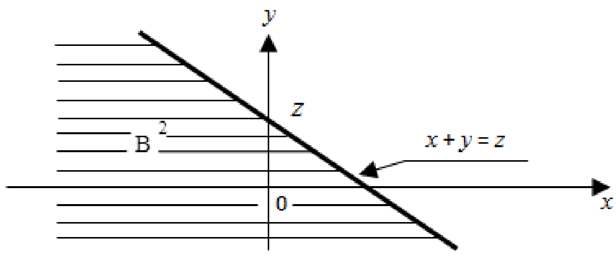

Рис. 4.1

Отсюда находим **плотность распределения** $f_\eta(z)$ **случайной величины** $\eta = \xi_1 + \xi_2$: $f_\eta(z) = F'_\eta(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1\xi_2}(x, z-x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1\xi_2}(z-y, y)dy$.

Если одномерные **случайные величины** ξ_1 и ξ_2 **независимы**, то есть выполнено $f_{\xi_1\xi_2}(x, y) = f_{\xi_1}(x) \cdot f_{\xi_2}(y)$, то выражение для плотности распределения $f_\eta(z)$ примет следующий вид:

$$f_\eta(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(z-x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(z-y) f_{\xi_2}(y)dy.$$

Последние формулы для $f_\eta(z)$ еще называются сверткой функций $f_{\xi_1}(x)$ и $f_{\xi_2}(y)$.

Пусть ξ_1 и ξ_2 - независимые **дискретные случайные величины** с известными законами распределения $\mathrm{P}(\xi_1 = x_i), \xi_1 \in \{x_1, x_2, ...\}$ и $\mathrm{P}(\xi_2 = y_j), \xi_2 \in \{y_1, y_2, ...\}$. Тогда распределение с. в. $\eta = \xi_1 + \xi_2$, где $\eta \in \{z_1, z_2, ...\}$, может быть вычислено следующим образом:

$$\mathrm{P}(\eta = z_k) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{P}(\xi_1 = x_i)\mathrm{P}(\xi_2 = z_k - x_i) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{P}(\xi_1 = z_k - y_j)\mathrm{P}(\xi_2 = y_j).$$

Композиционная устойчивость

Составление закона распределения суммы независимых случайных величин по законам распределения слагаемых называется **композицией законов распределения**.

Если суммируемые случайные величины независимы и распределены по одному и тому же закону (может быть с разными параметрами), а полученная сумма обладает тем же законом распределения, что и слагаемые, то говорят, что рассматриваемое распределение обладает **композиционной устойчивостью**.

У многих известных законов распределения наблюдается **композиционная устойчивость**, например **у закона Пуассона, закона Гаусса, биномиального распределения** и др.

4.2. Примеры решения задач

Пример 1. Для независимых случайных величин ξ и η заданы ряды распределения:

$\xi = x_i$	0	1	3
$p_i = \mathrm{P}(\xi = x_i)$	1/2	3/8	1/8

$\eta = y_j$	0	1
$q_j = \mathrm{P}(\eta = y_j)$	1/3	2/3

Построить ряд распределения случайной величины $\gamma = \xi + \eta$.

Решение: Случайная величина γ будет принимать значения из множества $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Так как случайные величины ξ и η независимые, то выполняется соотношение: $\mathrm{P}(\gamma = z_k) = \sum\limits_i \mathrm{P}(\xi = x_i)\mathrm{P}(\eta = z_k - x_i) =$

$= \sum\limits_j \mathrm{P}(\xi = z_k - y_j)\mathrm{P}(\eta = y_j)$, где $z_k \in \{0,1,2,3,4\}$.

Последовательно находим распределение случайной величины γ:

$$\mathrm{P}(\gamma = 0) = \mathrm{P}(\xi = 0)\mathrm{P}(\eta = 0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6};$$

$$\mathrm{P}(\gamma = 1) = \mathrm{P}(\xi = 0)\mathrm{P}(\eta = 1) + \mathrm{P}(\xi = 1)\mathrm{P}(\eta = 0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3} = \frac{11}{24};$$

$$\mathrm{P}(\gamma=2)=\mathrm{P}(\xi=0)\mathrm{P}(\eta=2)+\mathrm{P}(\xi=1)\mathrm{P}(\eta=1)+\mathrm{P}(\xi=2)\mathrm{P}(\eta=0)=$$
$$=\mathrm{P}(\xi=1)\mathrm{P}(\eta=1)=\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{4};$$
$$\mathrm{P}(\gamma=3)=\mathrm{P}(\xi=0)\mathrm{P}(\eta=3)+\mathrm{P}(\xi=1)\mathrm{P}(\eta=2)+\mathrm{P}(\xi=2)\mathrm{P}(\eta=1)+$$
$$+\mathrm{P}(\xi=3)\mathrm{P}(\eta=0)=\mathrm{P}(\xi=3)\mathrm{P}(\eta=0)=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{24};$$
$$\mathrm{P}(\gamma=4)=\mathrm{P}(\xi=0)\mathrm{P}(\eta=4)+\mathrm{P}(\xi=1)\mathrm{P}(\eta=3)+\mathrm{P}(\xi=2)\mathrm{P}(\eta=2)+$$
$$+\mathrm{P}(\xi=3)\mathrm{P}(\eta=1)+\mathrm{P}(\xi=4)\mathrm{P}(\eta=0)=\mathrm{P}(\xi=3)\mathrm{P}(\eta=1)=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{12}.$$

Проверим для полученного распределения свойство нормировки:

$$\sum_{k=1}^{5}\mathrm{P}(\gamma=z_k)=\frac{1}{6}+\frac{11}{24}+\frac{1}{4}+\frac{1}{24}+\frac{1}{12}=\frac{4+11+6+1+2}{24}=\frac{24}{24}=1.$$

Окончательно ряд распределения для случайной величины $\gamma=\xi+\eta$ примет вид:

$\gamma=z_k$	0	1	2	3	4
$\mathrm{P}(\gamma=z_k)$	1/6	11/24	1/4	1/24	1/12

Пример 2. Для двумерной дискретной случайной величины (ξ,η) задана матрица распределения:

$\eta=y_j$ \ $\xi=x_i$	-1	1
-1	0,05	0,1
0	0,3	0,05
1	0,15	0,25
2	0,05	0,05

где $p_{ij}=\mathrm{P}(\xi=x_i,\eta=y_j)$. Найти закон распределения случайной величины $\gamma=\eta^2-\xi^2$, вычислить математическое ожидание $\mathrm{M}\gamma$ и вероятность $\mathrm{P}(\gamma\geq 0)$.

Решение: Из матрицы распределения с. в. (ξ,η) понятно, что с. в. $\xi\in\{-1,1\}$ и с. в. $\eta\in\{-1,0,1,2\}$. Отсюда делаем вывод, что с. в. $\gamma=\eta^2-\xi^2$ принимает возможные значения из множества $\{-1,0,3\}$. Найдем распределение для случайной величины γ.

$$\mathrm{P}(\gamma=-1)=\mathrm{P}(\xi^2-\eta^2=-1)=\mathrm{P}(\{\xi=-1,\eta=0\}\cup\{\xi=1,\eta=0\})=$$
$$=\mathrm{P}(\{\xi=-1,\eta=0\})+\mathrm{P}(\{\xi=1,\eta=0\})=p_{12}+p_{22}=0,3+0,05=0,35;$$
$$\mathrm{P}(\gamma=0)=\mathrm{P}(\xi^2-\eta^2=0)=$$
$$=\mathrm{P}(\{\xi=1,\eta=1\}\cup\{\xi=1,\eta=-1\}\cup\{\xi=-1,\eta=1\}\cup\{\xi=-1,\eta=-1\})=$$
$$=\mathrm{P}(\{\xi=1,\eta=1\})+\mathrm{P}(\{\xi=1,\eta=-1\})+\mathrm{P}(\{\xi=-1,\eta=1\})+$$
$$+\mathrm{P}(\{\xi=-1,\eta=-1\})=p_{23}+p_{21}+p_{13}+p_{11}=0,25+0,1+0,15+0,05=0,55;$$
$$\mathrm{P}(\gamma=3)=\mathrm{P}(\xi^2-\eta^2=3)=\mathrm{P}(\{\xi=-1,\eta=2\}\cup\{\xi=1,\eta=2\})=$$
$$=\mathrm{P}(\{\xi=-1,\eta=2\})+\mathrm{P}(\{\xi=1,\eta=2\})=p_{14}+p_{24}=0,05+0,05=0,1.$$

Окончательно, ряд распределения для с. в. $\gamma=\eta^2-\xi^2$ примет вид:

$\gamma=z_i$	-1	0	3
$\mathrm{P}(\gamma=z_i)$	0,35	0,55	0,1

$$\mathrm{M}\gamma=\sum_{i=1}^{3}z_i\cdot\mathrm{P}(\gamma=z_i)=-1\cdot0,35+0\cdot0,55+3\cdot0,1=-0,05.$$

$$\mathrm{P}(\gamma\ge0)=\mathrm{P}(\gamma=0)+\mathrm{P}(\gamma=3)=0,55+0,1=0,65.$$

Пример 3. Совместная плотность распределения случайных величин η и ξ имеет вид: $f_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}A(x+y), & x,y\in[0,1];\\ 0, & x,y \text{ - другие.}\end{cases}$.

Найти константу A, плотность распределения $f_\xi(x)$ с. в. ξ и плотность распределения $f_\gamma(z)$ с. в. $\gamma=\max\{\xi,\eta\}$, вычислить $\mathrm{P}(0,2<\gamma<0,5)$.

Решение: Константу A будем искать из условия нормировки:

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_{\xi\eta}(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^1A(x+y)dxdy=A\int_0^1(\frac{1}{2}x^2+yx)\Big|_0^1dy=$$
$$=A\int_0^1(\frac{1}{2}+y)dy=A(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y^2)\Big|_0^1=A.$$

Отсюда $A=1$. Далее вычисляем $f_\xi(x)$.

$$f_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{\xi\eta}(x,y)dy=\int_0^1(x+y)dy=(xy+\frac{1}{2}y^2)\Big|_0^1=x+\frac{1}{2},x\in[0,1],$$

и $f_\xi(x)=0$ при $x\notin[0,1]$.

Для того чтобы определить $f_\gamma(z)$ с. в. $\gamma=\max\{\xi,\eta\}$, сначала найдем интегральную функцию распределения $F_\gamma(z)$.

$F_\gamma(z)=\mathrm{P}(\gamma<z)=\mathrm{P}((\xi,\eta)\in D_z)=\iint\limits_{D_z} f_{\xi\eta}(x,y)dxdy$, где область $D_z=\{(x,y): x<z, y<z\}$ заштрихована на рис. 4.2.

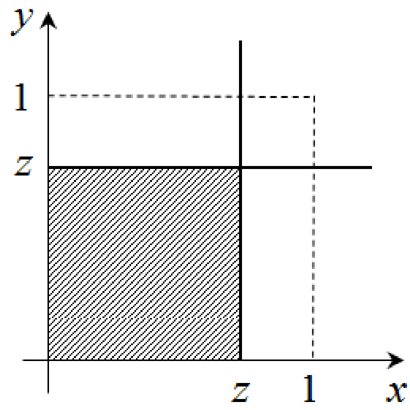

Рис. 4.2

при $z\le 0$ $F_\gamma(z)=0$;

при $0<z\le 1$ $F_\gamma(z)=\iint\limits_{D_z} f_{\xi\eta}(x,y)dxdy=\int\limits_0^z\int\limits_0^z f_{\xi\eta}(x,y)dxdy=\int\limits_0^z\int\limits_0^z(x+y)dxdy=$

$$=\int\limits_0^z\int\limits_0^z(x+y)dxdy=\int\limits_0^z(\frac{1}{2}z^2+yz)dy=\frac{1}{2}z^3+\frac{1}{2}z^3=z^3;$$

при $z>1$ $F_\gamma(z)=1$.

Окончательно, для $F_\gamma(z)$ получаем выражение:

$$F_\gamma(z)=\begin{cases}0, & z\le 0;\\ z^3, 0<z\le 1;\\ 1, & z>1.\end{cases}$$

Далее ищем плотность распределения $f_\gamma(z)$ с. в. γ по формуле $f_\gamma(z)=\dfrac{dF_\gamma(z)}{dz}$, в итоге получаем: $f_\gamma(z)=\begin{cases}3z^2, z\in[0,1];\\ 0, \quad z\notin[0,1].\end{cases}$

$$P(0,2<\gamma<0,5)=P(0,2\le\gamma<0,5)=F_\gamma(0,5)-F_\gamma(0,2)=0,5^3-0,2^3=0,117.$$

4.3. Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.3.1. Для двумерной дискретной случайной величины (ξ,η) известна матрица распределения:

$\eta \backslash \xi$	0	1	2
-1	0,2	0,17	0,1
0	0,15	0,05	0,03
1	0,1	0,01	0,19

Найти закон распределения случайной величины $\gamma=\xi-\eta^2$, вычислить вероятность $P(\gamma<1)$ и математическое ожидание $M\gamma$.

Задача 4.3.2. Пусть ξ_1 и ξ_2 - дискретные случайные величины, распределенные по закону Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно. Найти закон распределения для с. в. $\eta=\xi_1+\xi_2$.

Задача 4.3.3. Проверить композиционную устойчивость для закона распределения Гаусса.

Задача 4.3.4. Случайная точка (ξ_1,ξ_2) равномерно распределена внутри единичного квадрата. Найти закон распределения площади η прямоугольника со сторонами ξ_1 и ξ_2.

Задача 4.3.5. Пусть ξ и η - независимые случайные величины с известными законами распределения: $P(\xi=i)=(1-a)a^i, i\ge 0, 0<a<1$ и $P(\eta=j)=(1-b)b^j, j\ge 0, 0<b<1$. Найти закон распределения случайной величины $\gamma=\xi+\eta$.

Задача 4.3.6. Для двумерной дискретной случайной величины (ξ,η) известна матрица распределения:

$\eta \backslash \xi$	-1	0	1	3
1	0,2	0,17	0,1	0,05
2	0,15	0,05	0,03	0,25

Найти законы распределения случайных величин $\gamma=|\xi-\eta|$, $\nu=2\xi-\eta$.

Задача 4.3.7. Независимые случайные величины ξ и η имеют следующие ряды распределения:

$\xi = x_i$	-1	1
$\mathrm{P}(\xi = x_i)$	0,3	0,7

$\eta = y_j$	-1	0	1	2
$\mathrm{P}(\eta = y_j)$	0,1	0,2	0,4	0,3

Построить ряд распределения случайной величины $\gamma = |\xi + \eta|$ и вычислить математическое ожидание $\mathrm{M}\gamma$.

Задача 4.3.8. Двумерная случайная величина (ξ, η) имеет плотность распределения $f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} C(x + y^2), & 0 < x < y < 1, \\ 0, & x, y \text{ - другие.} \end{cases}$

Найти константу C, плотность распределения $f_\xi(x)$ с. в. ξ, плотность распределения $f_\gamma(z)$ с. в. $\gamma = \max\{\xi, \eta\}$, вычислить $\mathrm{P}(\gamma \geq 0{,}5)$.

Задача 4.3.9. Известно, что независимые случайные величины ξ и η имеют интегральные функции распределения $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$ соответственно. Найти интегральные функции распределения следующих случайных величин: 1) $\gamma_1 = \max\{2\xi, \eta\}$; 2) $\gamma_2 = \min\{\xi, \eta\}$.

Задача 4.3.10. Независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 имеют плотности распределения

$f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{6}, & x \in [2, 4], \\ 0, & x \notin [2, 4] \end{cases}$ и $f_{\xi_2}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & x \in [1, 3), \\ 0, & x \notin [1, 3), \end{cases}$ соответственно. Найти плотность распределения $f_\eta(z)$ и интегральную функцию распределения $F_\eta(z)$ случайной величины $\eta = \xi_1 + \xi_2$, вычислить $\mathrm{M}\eta$

5. Условные законы распределения случайных величин

Занятие предназначено для ознакомления студентов с условными законами распределения случайных величин.

5.1. Краткие теоретические сведения

Рассмотрим вероятностную модель $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathrm{P}(\bullet))$ статистически устойчивого эксперимента E, случайные величины ξ и η и произвольное событие $B \in \mathfrak{F}$.

Условная интегральная функция распределения случайной величины ξ **относительно события** $B \in \mathfrak{F}$, обозначаемая как $F_\xi(x \mid B)$, вычисляется по следующей формуле:

$$F_\xi(x \mid B) = \mathrm{P}(\{\xi < x\} \mid B) = \frac{\mathrm{P}(\{\xi < x\} \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(\{\xi < x, B\})}{\mathrm{P}(B)}.$$

Если ξ - **дискретная случайная величина** $\xi \in \{x_1, x_2, ...\}$, то при $\mathrm{P}(B) > 0$ и $i = 1,2,...$выполняются следующие равенства, определяющие её **условные законы распределения** относительно события B:

$$\mathrm{P}(\{\xi = x_i\} \mid B) = \frac{\mathrm{P}(\{\xi = x_i, B\})}{\mathrm{P}(B)}, \quad F_\xi(x \mid B) = \frac{\sum\limits_{i: x_i < x} \mathrm{P}(\{\xi = x_i, B\})}{\mathrm{P}(B)}.$$

Если ξ - **непрерывная случайная величина** с плотностью распределения $f_\xi(x)$, то при $\mathrm{P}(B) > 0$ функция $f_\xi(x \mid B) = \dfrac{d(F_\xi(x \mid B))}{dx}$ является условной плотностью распределения величины ξ относительно события B. Стоит отметить, что условные и безусловные законы распределения случайной величины имеют одинаковые свойства.

Совместная интегральная функция распределения $F_{\xi\eta}(x, y)$ двумерного случайного вектора (ξ, η) может быть вычислена следующим образом через условные интегральные функции распределения случайных величин ξ и η:

$$F_{\xi\eta}(x, y) = \mathrm{P}(\{\xi < x, \eta < y\}) = \mathrm{P}(\{\eta < y\}) \cdot \mathrm{P}(\{\xi < x\} \mid \{\eta < y\}) =$$
$$= F_\eta(y) \cdot F_\xi(x \mid B_y), \text{ где } B_y = \{\omega : \eta(\omega) < y\};$$

$$F_{\xi\eta}(x, y) = \mathrm{P}(\{\xi < x, \eta < y\}) = \mathrm{P}(\{\xi < x\}) \cdot \mathrm{P}(\{\eta < y\} \mid \{\xi < x\}) =$$
$$= F_\xi(x) \cdot F_\eta(y \mid B_x), \text{ где } B_x = \{\omega : \xi(\omega) < x\}.$$

Пусть ξ и η - **дискретные случайные величины** с заданными законами распределения, причем $\xi \in \{x_1, x_2, ...\}$, $\eta \in \{y_1, y_2, ...\}$ и известна вероятность $\mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = y_j) = p_{ij}, i, j = 1, 2, \ldots$. Тогда условные законы распределения с. в. ξ при условии, что с. в. η приняла конкретное значение y_j, определяются соотношениями:

$$\mathrm{P}(\{\xi = x_i\} \mid \{\eta = y_j\}) = \frac{\mathrm{P}(\{\xi = x_i, \eta = y_j\})}{\mathrm{P}(\{\eta = y_j\})} = \frac{p_{ij}}{\sum\limits_i p_{ij}},$$

$$F_\xi(x \mid \{\eta = y_j\}) = \frac{\sum\limits_{i: x_i < x} \mathrm{P}(\{\xi = x_i, \eta = y_j\})}{\mathrm{P}(\{\eta = y_j\})} = \frac{\sum\limits_{i: x_i < x} p_{ij}}{\sum\limits_i p_{ij}}.$$

Если ξ и η - **непрерывные случайные величины** с известными плотностями $f_{\xi\eta}(x, y)$, $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$, то формулы для условных законов распределения случайной величины ξ относительно значения $y, -\infty < y < +\infty$ другой случайной величины η примут следующий вид:

$$F_\xi(x \mid \eta = y) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{x} f_{\xi\eta}(u, y)\,du}{f_\eta(y)},$$

$$f_\xi(x \mid \eta = y) = \frac{\partial}{\partial x} F_\xi(x \mid \eta = y) = \frac{f_{\xi\eta}(x, y)}{f_\eta(y)} = \frac{f_{\xi\eta}(x, y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(x, y)\,dx}.$$

Иногда, для краткости записи вместо $F_\xi(x \mid \eta = y)$ и $f_\xi(x \mid \eta = y)$ пишут $F_{\xi|\eta}(x \mid y)$ и $f_{\xi|\eta}(x \mid y)$ соответственно.

Непосредственно из предыдущих формул следует **теорема умножения для плотностей**: $f_{\xi\eta}(x, y) = f_\eta(y) \cdot f_{\xi|\eta}(x \mid y) = f_\xi(x) \cdot f_{\eta|\xi}(y \mid x)$.

Если **случайные величины** ξ и η **независимы**, то теорема умножения для плотностей примет вид:

$$f_{\xi\eta}(x, y) = f_\eta(y) \cdot f_\xi(x) = f_\eta(y) \cdot f_{\xi|\eta}(x \mid y) = f_\xi(x) \cdot f_{\eta|\xi}(y \mid x), \text{ или}$$
$$f_{\xi|\eta}(x \mid y) = f_\xi(x), \quad f_{\eta|\xi}(y \mid x) = f_\eta(y).$$

Если ξ – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f_\xi(x)$, событие $A \in \mathfrak{F}$ и $\mathrm{P}(A \mid x)$ – условная вероятность события A относительно значения x с. в. ξ, тогда справедлива **формула полной вероятности для несчетного числа гипотез**:

$$\mathrm{P}(A) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}(A \mid x) f_\xi(x)\,dx.$$

Пусть выполняются все условия теоремы о полной вероятности и $\mathrm{P}(A) > 0$. Тогда **для условной плотности** $f_\xi(x \mid A)$ случайной величины ξ имеет место равенство: $f_\xi(x \mid A) = \dfrac{\mathrm{P}(A \mid x) f_\xi(x)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}(A \mid x) f_\xi(x) dx}$. Данную формулу еще называют **формулой Байеса для несчетного числа гипотез**.

5.2. Примеры решения задач

Пример 5.2.1. Задана матрица распределения двумерной с. в. (ξ, η):

$\eta \backslash \xi$	-1	2	5
0	0,1	0,2	0,1
11	0,3	0,25	0,05

где $\mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = y_j) = p_{ij}, i = \overline{1,3}, j = 1,2$. Найти все условные законы распределения случайной величины ξ и вероятность $\mathrm{P}(\{\eta = 0\} \mid \{\xi > 0\})$.

Решение: Из условий задачи следует, что с. в. $\xi \in \{-1,\ 2,\ 5\}$ и с. в. $\eta \in \{0,\ 11\}$. Так как с. в. η принимает два возможных значения, то для случайной величины ξ существуют два условных закона распределения:

$\mathrm{P}(\xi = x_i \mid \eta = 0), i = \overline{1,3}$ - первый условный закон распределения;

$\mathrm{P}(\xi = x_i \mid \eta = 11), i = \overline{1,3}$ - второй условный закон распределения.

Определим эти законы, используя известное соотношение:

$$\mathrm{P}(\{\xi = x_i\} \mid \{\eta = y_j\}) = \frac{\mathrm{P}(\{\xi = x_i, \eta = y_j\})}{\mathrm{P}(\{\eta = y_j\})} = \frac{p_{ij}}{\sum\limits_i p_{ij}}.$$

Здесь для условных законов распределения получаются две формулы:

$$\mathrm{P}(\xi = x_i \mid \eta = 0) = \frac{\mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = 0)}{\mathrm{P}(\eta = 0)},\ \mathrm{P}(\xi = x_i \mid \eta = 11) = \frac{\mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = 11)}{\mathrm{P}(\eta = 11)},$$

$i = \overline{1,3}$.

Сначала найдем одномерное распределение для случайной величины η:

$$\mathrm{P}(\eta = 0) = \sum_{i=1}^{3} p_{i1} = p_{11} + p_{21} + p_{31} = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}4;$$

$$\mathrm{P}(\eta=11)=\sum_{i=1}^{3} p_{i2}=p_{12}+p_{22}+p_{32}=0,3+0,25+0,05=0,6.$$

Далее вычисляем условные законы распределения.

$$\mathrm{P}(\xi=-1\,|\,\eta=0)=\frac{\mathrm{P}(\xi=-1,\eta=0)}{\mathrm{P}(\eta=0)}=\frac{p_{11}}{\mathrm{P}(\eta=0)}=\frac{0,1}{0,4}=\frac{1}{4};$$

$$\mathrm{P}(\xi=2\,|\,\eta=0)=\frac{\mathrm{P}(\xi=2,\eta=0)}{\mathrm{P}(\eta=0)}=\frac{p_{21}}{\mathrm{P}(\eta=0)}=\frac{0,2}{0,4}=\frac{1}{2};$$

$$\mathrm{P}(\xi=5\,|\,\eta=0)=\frac{\mathrm{P}(\xi=5,\eta=0)}{\mathrm{P}(\eta=0)}=\frac{p_{31}}{\mathrm{P}(\eta=0)}=\frac{0,1}{0,4}=\frac{1}{4}.$$

Окончательно, для первого условного закона распределения случайной величины ξ получаем:

$\xi=x_i$	-1	2	5
$\mathrm{P}(\xi=x_i\,|\,\eta=0)$	1/4	1/2	1/4

$$\mathrm{P}(\xi=-1\,|\,\eta=11)=\frac{\mathrm{P}(\xi=-1,\eta=11)}{\mathrm{P}(\eta=11)}=\frac{p_{12}}{\mathrm{P}(\eta=11)}=\frac{0,3}{0,6}=\frac{1}{2};$$

$$\mathrm{P}(\xi=2\,|\,\eta=11)=\frac{\mathrm{P}(\xi=2,\eta=11)}{\mathrm{P}(\eta=11)}=\frac{p_{22}}{\mathrm{P}(\eta=11)}=\frac{0,25}{0,6}=\frac{5}{12};$$

$$\mathrm{P}(\xi=5\,|\,\eta=11)=\frac{\mathrm{P}(\xi=5,\eta=11)}{\mathrm{P}(\eta=11)}=\frac{p_{32}}{\mathrm{P}(\eta=11)}=\frac{0,05}{0,6}=\frac{1}{12}.$$

Окончательно, для второго условного закона распределения с. в. ξ получаем:

$\xi=x_i$	-1	2	5
$\mathrm{P}(\xi=x_i\,|\,\eta=11)$	1/2	5/12	1/12

.

Вычислим вероятность $\mathrm{P}(\{\eta=0\}\,|\,\{\xi>0\})$. Для этого используем формулу $\mathrm{P}(\{\eta=y_i\}\,|\,B)=\dfrac{\mathrm{P}(\{\eta=y_i,B\})}{\mathrm{P}(B)}$, где $B=\{\xi>0\}$ и $y_i=2$. Событие B можно представить как $B=\{\xi>0\}=\{\xi=2\}\cup\{\xi=5\}$. Поэтому целесообразно предварительно найти вероятности $\mathrm{P}(\{\xi=2\})$ и $\mathrm{P}(\{\xi=5\})$:

$$\mathrm{P}(\xi=2)=\sum_{j=1}^{2} p_{2j}=p_{21}+p_{22}=0,2+0,25=0,45;$$

$$\mathrm{P}(\xi=5)=\sum_{j=1}^{2}p_{3j}=p_{31}+p_{32}=0{,}1+0{,}05=0{,}15.$$

Далее вычисляем исходную вероятность $\mathrm{P}(\{\eta=0\}\,|\,\{\xi>0\})$:

$$\mathrm{P}(\{\eta=0\}\,|\,\{\xi>0\})=\frac{\mathrm{P}(\{\eta=0,\xi>0\})}{\mathrm{P}(\{\xi>0\})}=\frac{\mathrm{P}(\{\eta=0,\xi=2\}\cup\{\eta=0,\xi=5\})}{\mathrm{P}(\{\xi=2\}\cup\{\xi=5\})}=$$

$$=\frac{\mathrm{P}(\{\eta=0,\xi=2\})+\mathrm{P}(\{\eta=0,\xi=5\})}{\mathrm{P}(\{\xi=2\})+\mathrm{P}(\{\xi=5\})}=\frac{0{,}2+0{,}1}{0{,}45+0{,}15}=\frac{1}{2}.$$

Пример 5.2.2. Известно, что двумерная случайная величина (ξ,η) распределена равномерно в квадрате $R=\{(x,y):|x|+|y|\le 1\}$. Найти условные плотности распределения $f_\xi(x\,|\,\eta=y)$, $f_\eta(y\,|\,\xi=x)$ и вычислить вероятность $\mathrm{P}(\{0<\xi\le\frac{1}{2}\}\,|\,\{\eta=0\})$.

Решение: Область $R=\{(x,y):|x|+|y|\le 1\}$ изображена на рис.5.1.

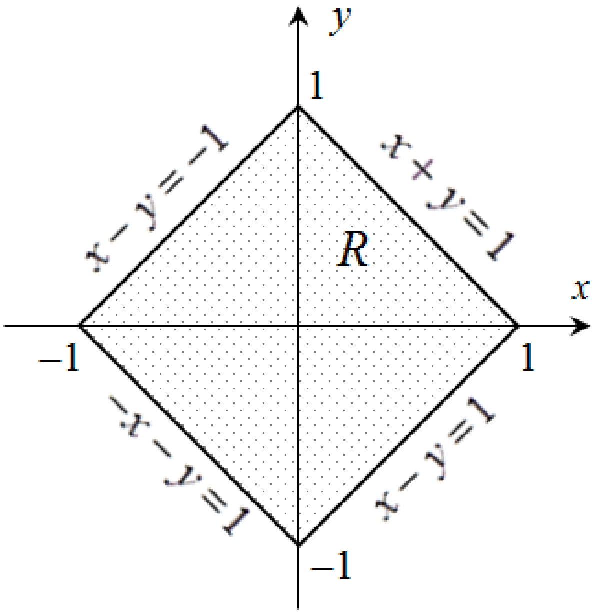

Рис. 5.1

Площадь S_R квадрата R равна $S_R=4\cdot S_\triangle=4\cdot(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1)=2$. Отсюда плотность распределения $f_{\xi\eta}(x,y)$ с. в. (ξ,η) имеет вид:

$$f_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & |x|+|y|\le 1;\\ 0, & |x|+|y|>1.\end{cases}$$

Для нахождения условных плотностей $f_\xi(x|\eta=y)$ и $f_\eta(y|\xi=x)$ с помощью формул $f_\xi(x|\eta=y)=\dfrac{f_{\xi\eta}(x,y)}{f_\eta(y)}$ и $f_\eta(y|\xi=x)=\dfrac{f_{\xi\eta}(x,y)}{f_\xi(x)}$ необходимо знать одномерные плотности $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$.

Ищем $f_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(x,y)dy$, для определения пределов интегрирования обращаемся к рис. 5.1:

при $-1\le x<0$ $f_\xi(x)=\int\limits_{-x-1}^{x+1}\dfrac{1}{2}dy=\dfrac{1}{2}(2x+2)=x+1;$

при $0\le x\le 1$ $f_\xi(x)=\int\limits_{x-1}^{1-x}\dfrac{1}{2}dy=\dfrac{1}{2}(2-2x)=1-x;$

при $x<-1$ или $x>1$ $f_\xi(x)=0.$

Окончательно, для $f_\xi(x)$ получаем соотношение:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|\le 1;\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

Аналогично вычисляем плотность $f_\eta(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(x,y)dx$:

при $-1\le y<0$ $f_\eta(y)=\int\limits_{-y-1}^{y+1}\dfrac{1}{2}dx=\dfrac{1}{2}(2y+2)=y+1;$

при $0\le y\le 1$ $f_\eta(y)=\int\limits_{y-1}^{1-y}\dfrac{1}{2}dy=\dfrac{1}{2}(2-2y)=1-y;$

при $y<-1$ или $y>1$ $f_\eta(y)=0.$

Окончательно, для $f_\eta(y)$ имеем выражение:

$$f_\eta(y)=\begin{cases}1-|y|, & |y|\le 1;\\ 0, & |y|>1.\end{cases}$$

Далее можем вычислить условные плотности:

$$f_\xi(x|\eta=y)=\frac{f_{\xi\eta}(x,y)}{f_\eta(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2(1-|y|)}, & |x|+|y|\le 1,\ |y|\le 1;\\ 0, & |x|+|y|>1,\ |y|<1;\end{cases}$$

здесь неравенство $|y|\le 1$ является избыточным, его можно убрать.

$$f_{\eta}(y\,|\,\xi=x)=\frac{f_{\xi\eta}(x,y)}{f_{\xi}(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2(1-|x|)}, & |x|+|y|\le 1,\ \ |x|\le 1;\\ 0, & |x|+|y|>1,\ \ |x|<1;\end{cases}$$

здесь неравенство $|x|\le 1$ также избыточное и его можно убрать.

Вычислим $\mathrm{P}(\{0<\xi\le\frac{1}{2}\}\,|\,\{\eta=0\})$. При $y=0$ условная плотность $f_{\xi}(x\,|\,\eta=y)$ примет следующий вид:

$$f_{\xi}(x\,|\,\eta=0)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & |x|\le 1;\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

$$\mathrm{P}(\{0<\xi\le\frac{1}{2}\}\,|\,\{\eta=0\})=\int_0^{\frac{1}{2}} f_{\xi}(x\,|\,\eta=0)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-0)=\frac{1}{4}.$$

Пример 5.2.3. Определить вероятность обнаружения космического тела, если расстояние до него, измеряемое в километрах, есть равномерная случайная величина, принимающая значения в интервале $(100,200)$. При этом известно, что если расстояние до космического тела равно x, то вероятность его обнаружения равна $\dfrac{3000}{x^2}$.

Решение: Обозначим через ξ расстояние от станции слежения до объекта. По условию задачи ξ - это непрерывная случайная величина с плотностью распределения вида:

$$f_{\xi}(x)=\frac{f_{\xi\eta}(x,y)}{f_{\xi}(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{100}, & x\in(100,200);\\ 0, & x\notin(100,200).\end{cases}$$

Обозначим через A случайное событие, заключающееся в том, что станция слежения обнаружит объект. Из условия задачи получаем $\mathrm{P}(A\,|\,\{\xi=x\})=\mathrm{P}(A\,|\,x)=\dfrac{3000}{x^2}$. Для вычисления вероятности события A используем формулу полной вероятности для несчетного числа гипотез:

$$\mathrm{P}(A)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{P}(A\,|\,x)f_{\xi}(x)dx=\int_{100}^{200}\frac{3000}{x^2}\cdot\frac{1}{100}dx=-30\cdot\frac{1}{x}\Bigg|_{100}^{200}=-\frac{3}{20}+\frac{3}{10}=0{,}15.$$

5.3. Задачи для самостоятельного решения

Задача 5.3.1. Случайный вектор (ξ,η) задан матрицей:

$\eta \backslash \xi$	-1	0	1	2
1	0,1	0,15	0,3	0,15
2	0,1	0,05	0,1	0,05

Найти все условные законы распределения случайной величины ξ.

Задача 5.3.2. Для двумерной случайной величины (ξ,η) известна матрица распределения:

$\eta \backslash \xi$	2	5	8
0,4	0,15	0,3	0,35
0,8	0,05	0,12	0,03

Найти вероятности $\mathrm{P}(\{\xi = x_i\} \mid \{\eta = 0{,}8\}), x_i \in \{2,\ 5,\ 8\}$ и $\mathrm{P}(\{\eta = y_j\} \mid \{\xi = 5\}), y_j \in \{0{,}4,\ 0{,}8\}$.

Задача 5.3.4. Случайный вектор (ξ,η) задан таблицей:

$\eta \backslash \xi$	1	2
-1	0,15	0,05
0	0,3	0,05
1	0,35	0,1

Найти все условные законы распределения случайной величины η и вычислить вероятность $\mathrm{P}(\{\xi = 1\} \mid \{\eta \le 0\})$.

Задача 5.3.5. Для случайной величины (ξ,η) задано распределение:

$\eta \backslash \xi$	1	2
-2	1/6	1/8
1	1/4	1/6
3	1/6	1/8

Найти вероятности $\mathrm{P}(\{\eta = 1\} \mid \{\xi = 1\})$ и $\mathrm{P}(\{\xi = 1\} \mid \{\eta \le 1\})$.

Задача 5.3.6. Совместная плотность распределения случайных величин ξ и η имеет вид:

$$f_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}1,\ 0\le x\le 2, 0\le y\le 1-\dfrac{x}{2};\\ 0,\ \ x,y \text{ - другие.}\end{cases}$$

Найти условную плотность $f_{\eta|\xi}(y\,|\,x)$.

Задача 5.3.7. Положение случайной точки (ξ,η) равновозможно внутри круга $x^2+y^2=R^2$. Определить условные плотности $f_\xi(x\,|\,\eta=y)$, $f_\eta(y\,|\,\xi=x)$, вычислить вероятность $\mathrm{P}(\{\dfrac{R}{4}\le\xi<\dfrac{R}{2}\}\,|\,\{\eta=0\})$.

Задача 5.3.8. Совместная плотность распределения случайных величин ξ и η имеет вид:

$$f_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}A(yx+y^2),\ 0\le x\le 2, 0\le y\le 2;\\ 0,\ \ x,y \text{ - другие.}\end{cases}$$

Определить константу A, найти условную плотность $f_\eta(y\,|\,\xi=x)$ и вычислить вероятность $\mathrm{P}(\{\eta<2\}\,|\,\{2\xi=1\})$.

Задача 5.3.9. Плотность распределения двумерной случайной величины (ξ,η) имеет вид $f_{\xi\eta}(x,y)=Ae^{-4x^2-4xy-4y^2}$. Найти константу A и условные плотности распределения $f_\xi(x\,|\,\eta=y)$, $f_\eta(y\,|\,\xi=x)$.

Задача 5.3.10. Определить вероятность попадания в объект, если расстояние до него, измеряемое в метрах, есть равномерная случайная величина, принимающая значения в интервале (350, 400). При этом известно, что если расстояние до объекта равно x, то вероятность попадания $50/x$.

Литература

1. Федоткин М.А. Основы прикладной теории вероятностей и статистики. Учебник. – М.: Высшая школа, 2006.

2. Федоткин М.А. Модели в теории вероятностей. Учебник. – М.: Наука – ФИЗМАТЛИТ, 2012.

2. Ширяев А.Н. Вероятность –1, 2. – М.: МЦНМО, 2004.

3. Боровков А.А. Теория вероятностей. – М.: Эдиториал УРСС, 1999.

4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Эдиториал УРСС, 2005.

5. Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей: Учеб. пособие для ВУЗов. – М.:Высшая школа, 1994.

6. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. — М.: ФАЗИС, 1998.

7. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 1, 2. – М.: Мир, 1984.

8. Пытьев Ю.П., Шишмарев И.А. Курс теории вероятностей и математической статистики для физиков. - М.:МГУ, 1983.

9. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей: Учеб. пособие для студентов втузов - М.: Издательский центр «Академия», 2003.

Екатерина Вадимовна **Пройдакова**

Михаил Андреевич **Федоткин**

Владимир Александрович **Зорин**

ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Часть 2

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».

603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.