Равномерное распределение

Описывает n равновероятных событий:

$$k = 1, 2, \ldots, n; \quad p_k = \frac{1}{n}.$$

Математическое ожидание и дисперсия:

$$< k >= \frac{1+n}{2}; \quad D_k = \frac{(n^2-1)}{12}. \tag{1}$$

Формулы сумм:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}; \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{k\,(k+1)}{2} = \frac{n\,(n+1)(n+2)}{6}.$$

Так как можно представить

$$k^2 = \frac{k\,(k+1)}{} + \frac{(k-1)k}{}; \quad \sum^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{}$$

то математическое ожидание k^2

$$< k^2 >= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6},$$

откуда вычислим дисперсию:

$$D =< k^2 > - < k >^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2-1}{12}.$$

Например, для игральной кости $(n = 6)$:

$$< k >= 3.5; \quad D_k = \frac{36-1}{12}.$$

При сдвиге $k = n_1, n_1 + 1, \ldots, n_2$:

$$< k >= \frac{n_1+n_2}{2}; \quad n = n_2 - n_1 + 1; \quad D_k = \frac{(n^2-1)}{12}.$$

Дисперсия от сдвига не меняется.

Бинарное распределение

Бинарное распределение числа k, принимающего всего два значения: 1 или 0 – с вероятностями p и $1-p$ соответственно. Производящая функция семиинвариантов находятся просто:

$$F(t) = p\,e^{t\cdot 1} + (1-p)\,e^{t\cdot 0} = p\,e^{t} + 1 - p; \quad \chi(t) = \ln(p\,e^{t} + 1 - p),$$

а из нее и сами семиинварианты:

$$\frac{d\,\chi(t)}{dt} = \frac{p\,e^{t}}{p\,e^{t} + 1 - p} = \frac{p}{p + (1-p)\,e^{-t}};\ \chi_1 =< k >= p. \tag{2}$$

$$\frac{d^2\,\chi(t)}{dt^2} = \frac{p\,(1-p)\,e^{t}}{(p\,e^{t} + 1 - p)^2};\ \chi_2 = D_k = p(1-p). \tag{3}$$

Биномиальное распределение

Биномиальное распределение числа m, принимающего значения от нуля до n можно представить как сумму n случайных чисел k, принимающих всего два значения: 0 или 1 с вероятностями $1-p$ и p соответственно, подчиняющихся бинарному распределению (биномиальному распределение при $n=1$).

В биномиальном распределении складываются n независимых случайных чисел k с одинаковыми характеристиками $m=\sum_{i=1}^{n} k_i$, так что соответствующие семиинварианты просто умножаются на n:

$$< m >= n < k >= n\,p; \quad D_m = n\,D_k = n\,p(1-p). \qquad (4)$$

Распределение Пуассона

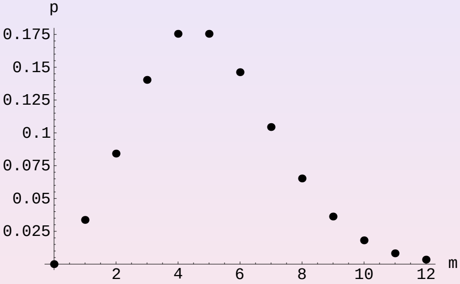
Является пределом биномиального распределения при $n \to \infty$ с заданным математическим ожиданием $< m >= \mu = n\, p$, так что при этом $p = \mu/n \to 0$. Еще не расписав самого распределения, можно записать дисперсию:

$$D_m = \lim_{n\to\infty,\, p=\mu/n} n\, p(1-p) = \mu. \tag{5}$$

Дисперсия совпадает с математическим ожиданием.
Само распределение целого числа m, принимающего значения от нуля до бесконечности, определяется однопараметрическим выражением (параметр μ):

$$P_m = \lim_{n\to\infty,\, p=\mu/n} \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\, p^m\,(1-p)^{n-m} = \frac{\mu^m}{m!}\, e^{-\mu}. \tag{6}$$

При $\mu = 5$ его представляет график:



Производящая функция моментов

$$F(t) = e^{-\mu} \sum_{m=0}^{\infty} e^{m\,t} \frac{\mu^m}{m!} = e^{-mu}\, e^{\mu\, e^t} = e^{\mu(e^t - 1)}$$

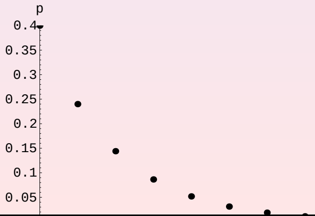
определяет производящую функцию семиинвариантов

Распределение Паскаля

Распределение Пуассона может иметь максимум, распределение Паскаля – также вероятность целого числа m от нуля до бесконечности с единственным параметром γ $(0 < \gamma < 1)$:

$$p_m = (1 - \gamma)\,\gamma^m \tag{8}$$

монотонно убывает с ростом m.
Для $\gamma = 0.6$ построен график:



Производящая функция моментов

$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{t\,n}\,p_n = (1-\gamma)\sum_{k=0}^{\infty}(\gamma\,e^t)^k = \frac{1-\gamma}{1-\gamma\,e^t}$$

определяет производящую функцию семиинвариантов:

$$\chi(t) = \ln(1-\gamma) - \ln(1-\gamma\,e^t); \quad \frac{d\chi}{dt} = \frac{\gamma}{e^{-t}-\gamma}; \quad \frac{d^2\chi}{dt^2} = \frac{\gamma\,e^{-t}}{(e^{-t}-\gamma)^2},$$

откуда находятся математическое ожидание и дисперсия:

$$< k >= \frac{\gamma}{1-\gamma}; \quad D_k = \frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}.$$

Вместо γ можно ввести μ – математическое ожидание:

$$\mu = \frac{\gamma}{1-\gamma}; \quad \gamma = \frac{\mu}{\mu+1}; \quad D_k = \frac{\gamma}{(1-\gamma)^2} = \mu\,(\mu+1),$$

а вероятность $p_k = \frac{\mu^k}{(\mu+1)^{k+1}}$.

Непрерывные распределения вероятностей

Для непрерывно распределенных величин x определяется вероятность попадания в бесконечно малый интервал заданной величины dx:

$$dp(x) = \rho(x)\,dx; \quad \rho \geq 0. \tag{9}$$

где функция $\rho(x)$ называется *плотностью распределения вероятностей*.

Интеграл в некотором интервале

$$\int_a^b \rho(x)\,dx = \int_a^b dp(x)$$

с точки зрения теории вероятностей определеяет вероятность нахождения случайной величины в интервале (a, b), а с точки зрения геометрии определяет площадь под кривой плотности вероятности на участке (a, b).
На всем интервале изменения случайной величины эта вероятность равна единице, а это значит, что площадь под всей кривой плотности вероятности равна единице.
Если интервал изменения случайной величины разделен на n частей, то вероятность попадания в ту или иную часть равна площади под кривой плотности вероятности в этой части.

Равномерное распределение

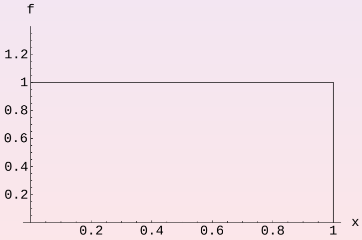
Непрерывная случайная величина x принимает значения на интервале (a, b) равновероятно: вероятность попасть в любой интервал между a и b пропорциональна величине интервала: $p(\Delta x) = c\,\Delta x$, а так как вероятность попадания в произвольную точку интервала равна единице

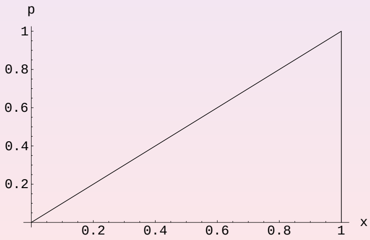
$$c\,(b-a) = 1; \quad c = \frac{1}{b-a}; \quad dp(x) = \frac{1}{b-a}\,dx.$$

Это распределение имеет два параметра a и b.
Линейным преобразованием любой интервал (a, b) может быть приведен к единичному $(0, 1)$ и распределение становится *стандартным* без параметров.

$$dp(x) = 1 \cdot dx; \quad p(x) = x; \tag{10}$$

Плотность вероятности на интервале от нуля до единицы постоянна и равна единице, а сама вероятность попадания в интервал от нуля до x растет линейно, достигая значения полной вероятности единица при $x = 1$:





Бета-распределение

Переменная x изменяется на интервале $(0, 1)$ с дифференциалом вероятности, определяемом двумя параметрами α и β:

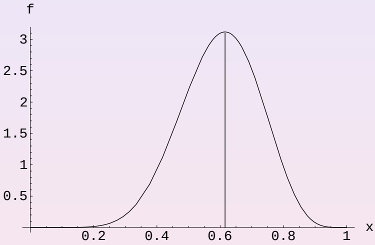
$$dp(x\,/\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\,x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1}\,dx \qquad (11)$$

Порождается β- интегралом Эйлера:

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1}\,dx = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

В частности, равномерное распределение является частным случаем бета - распределения с $\alpha=\beta=1$.

На графике представлено распределение с $\alpha = 9,\ \beta = 6$:



Математическое ожидание

$$< x >= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_0^1 x^\alpha\,(1-x)^{\beta-1}\,dx =$$

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\,\frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

Аналогично

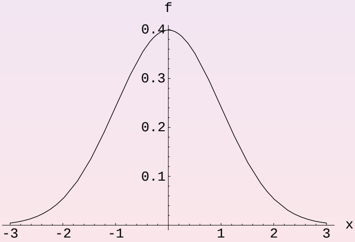
$$< x^2 >= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\,\frac{\Gamma(\alpha+2)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} = \frac{\alpha\,(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)},$$

откуда дисперсия

$$D =< x^2 > - < x >^2= \frac{\alpha\,\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}. \qquad (12)$$

Нормальное распределение

Это распределение непрерывной случайной величины на всей вещественной прямой.



Стандартное нормальное распределение не имеет параметров, математическое ожидание равно нулю, а дисперсия – единице:

$$dp(\xi) = \frac{d\xi}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Линейным преобразованием $\xi = (x - \mu)/\sigma$ получается нормальное распределение с двумя параметрами: μ и σ:

$$dx \quad (x-\mu)^2$$

Производящая функция моментов нормального распределения:

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t\,x - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = e^{t\,\mu + \sigma^2\,\frac{t^2}{2}}$$

определяет очень специфическую производящую функцию семиинвариантов нормального распределения:

$$\chi(t) = t\,\mu + \sigma^2\,\frac{t^2}{2}; \quad \chi_1 = < x > = \mu; \; \chi_2 = D_x = \sigma^2.$$

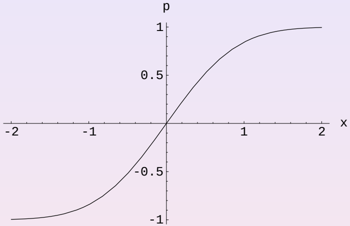
У нормального распределения отличны от нуля только первый и второй семиинварианты.
В частности, стандартно нормально распределенная случайная величина имеет нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию, а также нулевые все высшие семиинварианты.

Интеграл ошибок

Нормально распределенная случайная величина принимает значения от минус до плюс бесконечности. При этом вследствие симметрии распределения вероятность значения меньшего математического ожидания μ равна ровно $1/2$, также как и вероятность значения большего μ: точка $x = \mu$ делит площадь под кривой плотности нормального распределения пополам.

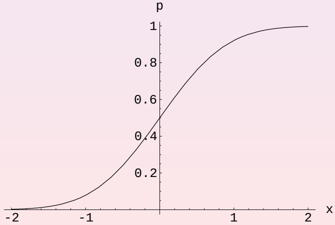
Площадь под кривой стандартного нормального распределения на симметричном участке $(-x, x)$ определяется *интегралом вероятностей* $\Phi(\eta)$, но часто в книгах приводится *интеграл ошибок* – функция $\mathrm{erf}(x)$:

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int^{x} e^{-t^2}\, dt = 2\,\Phi(\sqrt{2}\,x). \quad (13)$$



Полная площадь равна $\mathrm{erf}(\infty) = 1$. График функции $\mathrm{erf}(x)$.

Вероятность того, что случайная величина меньше заданного числа a определяется функцией $p(a) = (1 + \mathrm{erf}(a))/2$, принимающей значений 0 на минус бесконечности и 1 на плюс бесконечности.



Исторически первым ввел нормальное распределение Лаплас (1749-1827) в чуть не стандартном виде

$$dp(x) = \frac{dx}{\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2},$$

которое с виду проще, чем стандартное нормальное распределение (**??**) и потому до сих пор используется довольно часто. Однако в распределении Лапласа дисперсия равна $1/2$, тогда как в стандартном нормальном распределении (**??**), введенном Гауссом (1777-1855), дисперсия равна единице, что с точки зрения теории вероятностей делает распределение Гаусса более предпочтительным.

Суперпозиция нормальных величин

Пусть имеется n различных (или одинаковых) нормально распределенных величин x_1, x_2, ..., x_n с математическими ожиданиями $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ и джисперсиями $D_1, D_2, \ldots, D_n$. Их суперпозиция с постоянными коэффициентами a_i и константой c:

$$z = a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_n\, x_n + c$$

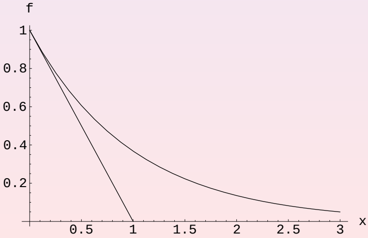
является также случайной величиной и имеет все семиинварианты выше второго равными нулю, так как они равны нулю у всех составляющих, то есть также является нормально распределенной случайной величиной. Ее математическое ожидание (линейный семиинвариант):

$$< z >= a_1\, \mu_1 + a_2\, \mu_2 + \cdots + a_n\, \mu_n + c,$$

Экспоненциальное распределение

Непрерывная случайная величина принимает любые положительные значения. Стандартное и с масштабным параметром k:

$$dp(\xi) = e^{-\xi}\, d\xi; \quad \xi = k\,x;\; x = \xi/k; \quad dp(x\,/\,k) = k\, e^{-k\,x}\, dx. \tag{14}$$



Гамма-распределение

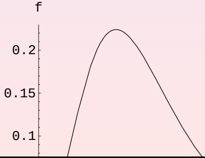
Порождается интегральным представлением Г-функции:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx.$$

Случайная величина принимает любые положительные значения с вероятностью

$$dp(x\,/\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\, e^{-x}\, x^{\alpha-1}\, dx.$$

Приведен график для $\alpha = 4$:



Первые два момента:

$$< x >= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-x}\, x^\alpha\, dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha;$$

$$< x^2 >= \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha\,(\alpha+1)$$

определяют дисперсию

$$D_x = \alpha. \tag{15}$$

Не стандартное Г-распределение получается масштабным преобразованием $x = k\,y$ с соответствующим изменением математического ожидания и дисперсии:

$$dp(y\,/k,\alpha) = \frac{k^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, e^{-k\,y}\, y^{\alpha-1}\, dy; \quad < y >= \frac{\alpha}{k}; \quad D_y = \frac{\alpha}{k^2}. \tag{16}$$

Многомерное нормальное распределение

Совместное распределение n независимых стандартных нормальных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$

$$dp(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = dp(\xi_1)\, dp(\xi_2)\, \ldots\, dp(\xi_n) =$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}(\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2)}\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n \qquad (17)$$

линейным преобразованием

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,(x_j - \mu_j) \qquad (18)$$

приводит к *многомерному нормальному распределению* n случайных величин x_i:

$$dp(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\det(a_{ij})\, e^{-C}}{(\sqrt{2\pi})^{n/2}} \left(e^{-\frac{1}{2}\sum K_{ij}x_ix_j + \sum b_ix_i}\right) dx_1\, dx_2 \ldots dx_n =$$

$$\frac{\det(\sqrt{K_{ij}})\, e^{-C}}{(\sqrt{2\pi})^{n/2}} \left(e^{-\frac{1}{2}\sum K_{ij}x_ix_j + \sum b_ix_i}\right) dx_1\, dx_2 \ldots dx_n, \qquad (19)$$

где

$$K_{ij} = K_{ji} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}\, a_{js}; \quad \det(K_{ij}) = (\det(a_{ij}))^2;$$

$$b_i = \sum_{s=1}^{n} \mu_s K_{si}; \quad C = \frac{1}{2} K_{ij}\, \mu_i\, \mu_j. \qquad (20)$$

В распределении (19) два сложных параметра: симметричная $n \times n$ матрица K_{ij} и n-вектор b_i.

Так как математические ожидания всех исходных случайных величин ξ_i равны нулю, то из (18) следует, что математические ожидания

$$< x_i >= \mu_i = \sum_{j=1}^{n} L_{ij}\, b_j,$$

где L_{ij} – матрица, обратная матрице K_{ij}:

$$\sum_{j=1}^{n} K_{ij}\, L_{jk} = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases} .$$

Это *ковариационная матрица*, определяющая математические ожидания

$$< (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) >= L_{ij}. \tag{21}$$

В частности, ее диагональные элементы определяют дисперсии случайных величин x_i: $< (x_i - < x_i >)^2 >= L_{ii}$, а

Функции случайной величины

Может измениться область определения случайной величины. Для нормально распределенной величины x, принимающей значения от минус до плюс бесконечности, величина $y = x^2$ принимает только положительные значения, в которые дают вклад как положительные, так и отрицательные значения x, что дает в распределении y дополнительный множитель 2:

$$x = \sqrt{y};\ dx = \frac{dy}{2\sqrt{y}};$$

$$dp(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} e^{-y/2} \left(\frac{y}{2}\right)^{1/2-1} d\left(\frac{y}{2}\right).$$

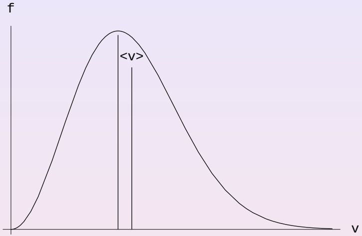
Это – Г-распределение с $\alpha = 1/2$. Здесь учтено, что $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Распределение Максвелла

Каждая из трех компонент вектора скорости молекулы имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией D, пропорциональной температуре, так что вероятность вектора скорости с компонентами $(v_x,\ v_y,\ v_z)$:

$$dp(v_x, v_y, v_z) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\, D})^3}\, e^{-\frac{1}{2D}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)} dv_x\, dv_y\, dv_z$$

Интегрирование ведется по трехмерному объему в пространстве скоростей. Если нас интересует только величина скорости, нужно ввести модуль скорости v. Векторы с одианковым значением v образуют в пространстве скоростей сферу площадью $4\,\pi\, v^2$, а сферический слой скоростей со значениями от v до $v + dv$ имеет объем $4\,\pi\, v^2\, dv$, так что



Наиболее вероятная скорость определяется дисперсией $D = kT/m$, где k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура и m – масса молекулы:

$$\frac{d}{dv}\left(-\frac{v^2}{2D} + 2\ln(v)\right) = -\frac{v}{D} + \frac{2}{v} = 0; \quad v_0 = \sqrt{2D}.$$

Если ввести величину $y = v^2/(2\,D)$, то распределение для y – это Г - распределение с параметром 3/2:

$$dp(y) = \frac{1}{\Gamma(3/2)}\, e^{-y}\, \sqrt{y}\, dy.$$

Скорость $v = \sqrt{2\,D\,y} = v_0\,\sqrt{y}$, так что средняя скорость

$$< v >= v_0\, < \sqrt{y} >= v_0\, \frac{1}{\Gamma(3/2)} \int_0^\infty e^{-y}\, y\, dy = \frac{v_0}{\Gamma(3/2)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, v_0 = 1.13$$

Эта скорость также указана на графике и она больше наиболее вероятной.

Математическое ожидание v^2

$$< v^2 >= v_0^2\, < y >= v_0^2\, \frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(3/2)} = \frac{3}{2}\, v_0^2$$

определяет *среднеквадратичную скорость*

$v = \sqrt{< v^2 >} = \sqrt{1.5}\, v$ и дисперсию модуля скорости

Распределение Релея

Распределение Релея подобно распределению Максвелла, но не для вектора в трехмерном пространстве, а для вектора на плоскости. Как и у Максвелла каждая компонента распределена нормально с нулевым математическим ожиданием и дисперсией D:

$$dp(v_x, v_y) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\, D})^2}\, e^{-\frac{1}{2D}(v_x^2+v_y^2)} dv_x\, dv_y.$$

Переходя к модулю, площадь в пространстве скоростей вблизи модуля v равна $2\,\pi\, v\, dv$, так что

$$dp(v) = \frac{1}{D}\, e^{-\frac{v^2}{2\,D}}\, v\, dv. \tag{23}$$

В окрестности нуля плотность линейна по скорости, в то время как в распределении Максвелла квадратична.
Для величины $y = v^2/(2\,D)$ это Г-распределение с показателем 1:

$$dp(y) = e^{-y}\,dy.$$

Наиболее вероятная скорость определяется из условия максимума логарифма плотности вероятности

$$\frac{d}{dv}\left(-\frac{v^2}{2\,D} + \ln(v)\right) = -\frac{v}{D} + \frac{1}{v} = 0; \quad v_0 = \sqrt{D}.$$

Так как $v = \sqrt{2\,D\,y} = v_0\,\sqrt{2\,y}$ вычисляется средняя скорость

$$< v >= \sqrt{2}\,v_0\, < \sqrt{y} >= \sqrt{2}\,v_0\,\Gamma(\frac{3}{2}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,v_0 \approx 1.25\,v_0.$$

Средний квадрат скорости

Распределение χ^2

Распределения Релея и Максвелла фактически являются частным случаем (при $n = 2, 3$) более общего распределения, называемого χ^2 с параметром n – число компонент с нормальным распределением и одинаковой дисперсией D. Так как масштабное преобразование (уменьшение в $\sqrt{D}$ раз) приводит к случайной величине с единичной дисперсией, то достаточно рассмотреть только стандартное χ^2 распределение с n степенями свободы. Правда, в отличие от распределений Релея и Максвелла, в χ^2 - распределении случайной величиной является не модуль n - мерного вектора $\mathbf{x}$ с модулем x, а его квадрат:

$$\chi^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \sum^n x_i^2 = u = r^2.$$

В n-мерном пространстве модуль r (а следовательно и u) постоянен на $(n-1)$ - мерной сфере с $(n-1)$ - мерным объемом $\Omega_{n-1}\, r^{n-1}$, а сферический слой от r до $r+dr$ имеет n - мерный объем

$$dV_n = \Omega_{n-1}\, r^{n-1}\, dr = \Omega_{n-1}\, u^{(n-1)/2}\, \frac{du}{2\sqrt{u}},$$

так что распределение по u:

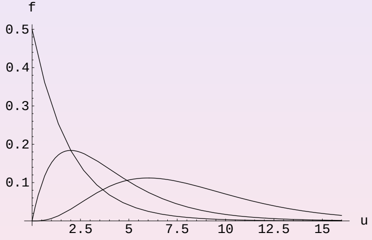
$$dp(\chi^2) = dp(u) = N^{-1}\, e^{-u/2}\, u^{n/2-1}\, du; \quad N^{-1} = N_1^{-1}\, \Omega_{n-1}/2. \tag{24}$$

Нормировочный множитель вычислим из условия нормировки вероятности:

$$N = \int_0^\infty e^{-u/2}\, u^{n/2-1}\, du = 2^{n/2}\,\Gamma(\frac{n}{2}),$$

так что нормированное распределение представлено

На графиках показаны распределения при $n = 2, 4, 8$ (где какое?):



Математическое ожидание

$$< u >= \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^\infty e^{-u/2}\, u^{n/2}\, du = \frac{2^{n/2+1}\,\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{2^{n/2}\,\Gamma(\frac{n}{2})} = 2\,\frac{n}{2} = n.$$

Аналогично, второй момент

Распределение Стьюдента

По Стьюденту (Вильям Госсет, 1876-1937) с m степенями свободы распределена величина

$$S = \frac{x_0}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2)/m}},$$

где $x_0, x_1, \ldots, x_m$ – нормально распределенные величины с нулевым математическим ожиданием и одинаковой дисперсией. Так как это отношение от дисперсии не зависит, то при вычислении распределения дисперсию можно полагать равной единице:

$$dp(x_0, x_1, \ldots, x_m) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\right)^{m+1} \left(e^{-\frac{1}{2}(x_0^2 + (x_1^2 + \cdots + x_m^2))}\right) dx_0\, dx_1 \ldots dx_m.$$

Обозначим $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2}$ и выразим x_0 через S.

Стандартное распределение Стьюдента:

$$dp_m(S) = \frac{1}{\sqrt{\pi\, m}} \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})} \frac{dS}{\left(1+\frac{S^2}{m}\right)^{\frac{m+1}{2}}} \tag{26}$$

На графике распределение Стьюдента с 3-мя степенями свободы приведено в сравнении со стандартным нормальным распределением: