Теория вероятностей и математическая статистика

Д.Е. Бурланков

Нижегородский университет им. Н.И. Лобачевского

2006

Равновероятные события

- 2 события: орел – решка, любит – не любит, быть – или не быть.
- 6 событий: числа 1 – 6 на игральной кости.
- 36 игральных карт.
- 19 студентов.

Главная характеристика n – число событий.

Вероятность каждого события в этих примерах одинакова

$$p_i = \frac{1}{n}.$$

Суммарная вероятность

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = n\frac{1}{n} = 1. \quad (1)$$

Равновероятные события

- 2 события: орел – решка, любит – не любит, быть – или не быть.
- 6 событий: числа 1 – 6 на игральной кости.
- 36 игральных карт.
- 19 студентов.

Главная характеристика n – число событий.

Вероятность каждого события в этих примерах одинакова

$$p_i = \frac{1}{n}.$$

Суммарная вероятность

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = n\frac{1}{n} = 1. \qquad (1)$$

Равновероятные события

- 2 события: орел – решка, любит – не любит, быть – или не быть.
- 6 событий: числа 1 – 6 на игральной кости.
- 36 игральных карт.
- 19 студентов.

Главная характеристика n – число событий.

Вероятность каждого события в этих примерах одинакова

$$p_i = \frac{1}{n}.$$

Суммарная вероятность

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = n\frac{1}{n} = 1. \tag{1}$$

Вопрос

какова вероятность выпадения единицы на игральной кости в виде

- тетраэдра?
- икосаэдра?
- додекаэдра?

Сложные события

Бросается сразу две монеты. Сколько может выпасть орлов? 0, 1, 2. Три события. Каковы их вероятности? Д'Аламбер в "Энциклопедии" (1751 – 1780, 35 томов) – 1/3.

Какова вероятность, выйдя из дома, встретить динозавра?

Ответ: 1/2 – или встречу или не встречу.

События могут быть и не равновероятными.

Сложные события

Бросается сразу две монеты. Сколько может выпасть орлов? 0, 1, 2. Три события. Каковы их вероятности? Д'Аламбер в "Энциклопедии" (1751 – 1780, 35 томов) – 1/3.

Какова вероятность, выйдя из дома, встретить динозавра? Ответ: 1/2 – или встречу или не встречу.

События могут быть и не равновероятными.

Сложные события

Бросается сразу две монеты. Сколько может выпасть орлов? 0, 1, 2. Три события. Каковы их вероятности? Д'Аламбер в "Энциклопедии" (1751 – 1780, 35 томов) – 1/3.

Какова вероятность, выйдя из дома, встретить динозавра? Ответ: 1/2 – или встречу или не встречу.

События могут быть и не равновероятными.

Умножение вероятностей

Итак – две монеты, четыре равновероятных события:

- орел – орел;
- орел – решка;
- решка – орел;
- решка – решка.

Почему четыре? Пространство событий для двух монет есть *прямое произведение* пространств каждой монеты: каждому событию первой монеты соответствуют два события второй.

$$n_2 = n_1 \times n_1; \quad 2 \times 2 = 4.$$

Равновероятные события

Вероятность любой выбранной пары (например, решка – орел) равна

$$p_{ro} = \frac{1}{n_2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = p_r \cdot p_o.$$

Это соотношение между вероятностями отдельных *статистически независимых* событий и вероятностью совместного их появления называется *теоремой об умножении вероятностей*:

$$p_{ab} = p_a \cdot p_b. \tag{2}$$

Число событий

Сколько событий в пространстве трех монет?

$$n_3 = n_2 \cdot n_1 = n_1 \cdot n_1 \cdot n_1 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8,$$

(а не $2 \times 3 = 6$).
Сколько событий в пространствах

- двух игральных костей?
- монеты и игральной кости?
- двух игральных костей и трех монет?

Сложение вероятностей

Какова вероятность из колоды в 36 карт вытащить любую пиковую карту?

Вероятность любой карты – 1/36, пиковых карт – 9. В *множестве* всех 36-и карт пиковые карты образуют *подмножество* из девяти карт.

Вероятность попасть в подмножество равна *сумме вероятностей* элементов, составляющих это подмножество:

$$p_{\spadesuit} = \sum_{i=1}^{9} p_{\spadesuit i} = 9 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{4}.$$

Можно эту проблему решить и другим путем: имеется четыре равновероятные масти, значит вероятность каждой из них равна 1/4.

Сложение вероятностей

Какова вероятность из колоды в 36 карт вытащить даму?
Всего дам – четыре: $p_D = 4 \times 1/36 = 1/9$.
Какова вероятность из колоды в 36 карт вытащить пиковую даму?

$$p_{\spadesuit D} = p_{\spadesuit} \cdot p_D = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{36},$$

хотя ответ очевиден, так как она – единственная в колоде.

Аксиомы вероятностей

Ранее мы стартовали от равновероятных событий. Теперь можно отойти от этого ограничения.

- *Вероятностное пространство* $\mathcal{A}$ – это пространство событий a_i, $1 \leq i \leq n$, где n – *число событий*, каждому элементу которого a_i приписана *вероятность* p_i.
- *Вероятность* события p_i – это неотрицательное число $0 \leq p_i \leq 1$,
- Вероятности всех элементов множества подчиняются *условию нормировки*:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \tag{3}$$

Основные операции

Две основные операции с пространствами событий и вероятностями:

- Прямое произведение пространств событий $\mathcal{C} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Число элементов прямого произведения равно произведению чисел элементов составляющих пространств: $n_C = n_A \cdot n_B$. Вероятность совместного появления пары независимых событий равно *произведению* вероятностей каждого из событий $p_{ab} = p_a \cdot p_b$.
- Выделение подмножества пространства событий в одно событие. Вероятность попадания в это подмножество равна *сумме* вероятностей всех элементов, выделенных в данное подмножество.

Эти операции являются основными в построении пространств сложных событий из некоторых первоначальных с заданными вероятностями.

Основная задача теории вероятностей

Вычисление вероятностей сложных событий по заданным вероятностям элементарных событий.

Примеры

Теперь легко ответить, например, на вопрос:
какова вероятность выпадения одного орла и одной решки при выбрасывании двух монет? Подмножество решений содержит два события: (о, р) и (р, о), вероятность каждого 1/4, поэтому искомая вероятность равна 1/2. При бросании двух монет возможны четыре комбинации, приводящие к трем значениям числа орлов n_o:

- (р, р): $n_o = 0$; $p_0 = 1/4$.
- (р, о) (о, р): $n_o = 1$; $p_1 = 1/2$.
- (о, о): $n_o = 2$; $p_2 = 1/4$.

Какова вероятность выпадения одного орла и двух решек при выбрасывании трех монет?

$$n_{1/3} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8},$$

Биномиальное распределение

Стартует от *бинарного* распределения: пространство событий из двух элементов, которые абстрактно можно именовать $+$ и -. Вероятность плюса – p – вещественное число от 0 до 1, вероятность минуса – $(1-p)$. При бросании n монет пространство событий – это n - кратное произведение бинарного пространства самого на себя с числом элементов 2^n. В каждой реализации среди n составляющих элементарных событий выпадает m плюсов и остальные $n-m$ – минусы. Таким образом порождается новое вероятностное пространство, пространство случайного числа m, принимающего значения от нуля до n.

Биномиальное распределение

Если в какой-то реализации выпало m плюсов (и $n-m$ минусов), вероятность такого события равна $p^m(1-p)^{n-m}$ независимо от порядка выпадения плюсов и минусов. Но m плюсов может выпасть в разных комбинациях:

$$(+--++-),\ (-+-+-+),\ldots$$

Число таких комбинаций:

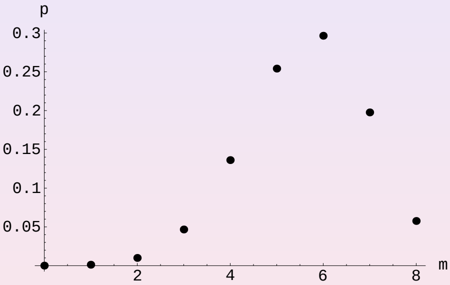
$$N_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

Вероятности событий с одинаковым m одинаковы $p^m(1-p)^{n-m}$, так что вероятность числа m равна

$$P_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\,p^m(1-p)^{n-m}. \tag{4}$$

Биномиальное распределение

При $p = 0.7$, $n = 8$ это распределение представлено на графике



Теория этого распределения была построена Якобом Бернулли (1654–1705) и нередко именуется *распределением Бернулли*. Таким образом n экземпляров бинарного пространства с 2^n элементов привели к пространству событий из $n+1$ элементов

Полиномиальное распределение

Как биномиальное распределение порождается многократным прямым произведением (многократной выборкой) вероятностного пространства с двумя состояниями, так многократная выборка из пространства с l состояниями и вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_l$ при условии $\sum_1^n p_i = 1$ порождает *полиномиальное распределение*.
После n-кратной выборки реализации i-х состояний $(m_1, \ldots, m_l)$; $\sum m_i = n$ определяются вероятностями полиномиального распределения:

$$P_{(m_1, m_2, \ldots, m_l)} = \frac{n!}{m_1!\, m_2!\, \ldots\, m_l!}\, p_1^{m_1}\, p_2^{m_2} \ldots p_l^{m_l}. \qquad (5)$$

Если случайным событием является значение какого-то числа (например, x), могущего принимать n различных значений в каком-то множестве $(x_i;\ 1 \leq i \leq n)$ с заданными или вычисленными вероятностями p_i, то такое вероятностное пространство называется *случайным числом* или *случайной величиной*.

Числа можно складывать, вычитать, умножать и делить и это приводит к возможности определять на вероятностных пространствах некоторые числовые характеристики этих пространств.

Математическое ожидание

Важнейшей числовой характеристикой случайной величины является ее *математическое ожидание*:

$$< x >= \sum_{i=1}^{n} x_i \, p_i . \tag{6}$$

Значение математического ожидания лежит между минимальным и максимальным значениями случайной величины.

$$x_{min} \le \; < x > \; \le x_{max} .$$

При многократной выборке случайного числа математическое ожидание $< x >$ оценивает среднее значение в множестве реализаций.

Функция случайной величины

Можно определить функцию случайной величины $f(x)$ и вычислить математическое ожидание этой функции:

$$< f(x) >= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, p_i. \tag{7}$$

Например, математическое ожидание константы равно самой константе $< c >= c$.
Математическое ожидание линейной функции:

$$< Ax + B >= A < x > +B.$$

Математическое ожидание разности случайной величины с ее математическим ожиданием (константой) всегда равно нулю:

$$< (x- < x >) >=< x > - < x >= 0. \tag{8}$$

Оценку вероятности отклонения случайной величины от ее математического ожидания дает *дисперсия*:

$$D_x =< (x- < x >)^2 >=< x^2 - 2x < x > + < x >^2 >= \tag{9}$$

$$< x^2 > - < x >^2 \geq 0.$$

Дисперсия равна нулю только у константы – в случае, если для всех событий случайная величина одна и та же (например, на всех гранях игрального кубика написано одно и то же число). Во всех реальных случаях дисперсия положительна.

Моменты

Дисперсия в последней формуле вычисляется через математическое ожидание квадрата и первой степени случайной величины. Математическое ожидание l-й степени случайной величины называется l-м *моментом*:

$$m_l = < x^l > = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^l \, p_i. \qquad (10)$$

Отметим, что во все введенные определения сами вероятности входят линейно.
Моменты – для некоторых аналитических распределений сразу все – могут быть определены через *производящую функцию моментов*:

$$F(t) = < e^{tx} > = \sum_{i=1}^{n} e^{t\,x_i}\, p_i = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l}{l!} m_l; \quad m_l = \left(\frac{d}{d\,t}\right)^l F(t)\Big|_{t=0}.$$

Семиинварианты

Наиболее сильным аппаратом теории вероятности являются *семиинварианты*, тесно связанные с моментами. Производящая функция семиинвариантов есть логарифм производящей функции моментов:

$$\chi(t) = \ln(F(t)) = t\,\chi_1 + \frac{t^2}{2}\,\chi_2 + \cdots + \frac{t^k}{k!}\,\chi_k + \ldots\,, \tag{12}$$

а коэффициенты разложения ее в ряд Тейлора по степеням параметра t и являются семиинвариантами:

$$\chi_k = \left(\frac{d}{d\,t}\right)^k \chi(t)|_{t=0}. \tag{13}$$

Свойства семиинвариантов

- Первый семиинвариант – математическое ожидание случайной величины, второй – ее дисперсия.
- Любой семиинвариант суммы двух независимых случайных величин равен сумме соответствующих семиинвариантов слагаемых:

$$F_{[x+y]}(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} e^{t(x_i+y_j)}\, p_{[x]_i} p_{[y]_j} = F_{[x]}(t) \cdot F_{[y]}(t);$$

$$\chi_{[x+y]}(t) = \ln(F_{[x+y]}(t)) = \ln(F_{[x]}(t) \cdot F_{[y]}(t)) = \chi_{[x]}(t) + \chi_{[y]}(t).$$

Отсюда вследствие (13)

$$\chi_{[x+y]_k} = \chi_{[x]_k} + \chi_{[y]_k}. \tag{14}$$

Соответствующие семиинварианты при сложении случайных величин складываются.

При масштабном преобразовании

$$< e^{t\,(\lambda\,x)} >=< e^{(t\,\lambda)\,x} >; \quad \chi_{[\lambda x]}(t) = \chi_{[x]}(\lambda\,t); \quad \chi_{[\lambda x]\,k} = \lambda^k\,\chi_{[x]\,k} \tag{15}$$

k-й семиинвариант умножается на масштабный множитель в k-й степени. В частности, дисперсия умножается на квадрат масштаба.

Третий семиинвариант χ_3 называют *асимметрией*, так как он равен нулю для распределений, симметричных относительно математического ожидания, а четвертый χ_4 называют *эксцессом*.

Дисперсия суперпозиции

Величина x распределена по Стьюденту с $< x >= 2$ и $D_x = 3$. Величина y распределена по закону χ^2 с $< y >= 4$ и $D_y = 5$. Найти математическое ожидание и дисперсию величины $z = 2\,x - 3\,y$.

$$< z >= 2 < x > +(-3) < y >= 2 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = -8.$$

$$D_z = 2^2\,D_x + (-3)^2\,D_y = 4 \cdot 3 + 9 \cdot 5 = 57.$$

Дисперсия всегда положительна.

Дисперсия суперпозиции

Величина x распределена по Стьюденту с $< x >= 2$ и $D_x = 3$. Величина y распределена по закону χ^2 с $< y >= 4$ и $D_y = 5$. Найти математическое ожидание и дисперсию величины $z = 2\,x - 3\,y$.

$$< z >= 2 < x > +(-3) < y >= 2 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = -8.$$

$$D_z = 2^2\,D_x + (-3)^2\,D_y = 4 \cdot 3 + 9 \cdot 5 = 57.$$

Дисперсия всегда положительна.

Дисперсия суперпозиции

Величина x распределена по Стьюденту с $< x >= 2$ и $D_x = 3$.
Величина y распределена по закону χ^2 с $< y >= 4$ и $D_y = 5$.
Найти математическое ожидание и дисперсию величины $z = 2\,x - 3\,y$.

$$< z >= 2 < x > +(-3) < y >= 2 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = -8.$$

$$D_z = 2^2\,D_x + (-3)^2\,D_y = 4 \cdot 3 + 9 \cdot 5 = 57.$$

Дисперсия всегда положительна.