Министерство образования и науки Российской Федерации

Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского

**А.Г.Коротченко, Н.Н.Чернышова, В.М.Сморякова**

**Принципы оптимальности в задачах принятия решений**

Учебно – методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией факультета ВМК   
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки   
09.03.03 «Прикладная информатика» и   
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Нижний Новгород

2015

УДК 517.977.5

ББК 22.1

Коротченко А.Г., Чернышова Н.Н., Сморякова В.М. ПРИНЦИПЫ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ: Учебно – методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 44 с.

Рецензент: к.ф.-м..н., доцент **В.А.Гришагин**

В данном учебно – методической пособии излагаются некоторые принципы оптимальности, используемые в задачах принятия решений, когда цели задаются с помощью связанных с ними отношений предпочтения.

Учебно - методическая пособие предназначено для самостоятельной работы студентов направлений подготовки «Прикладная информатика» и «Прикладная математика и информатика» факультета ВМК.

УДК 517.977.5

ББК 22.1

**© Нижегородский государственный**

**университет им. Н.И. Лобачевского, 2015**

В целом ряде задач принятия (выбора) решений цели не задаются в виде явных функциональных зависимостей на множестве допустимых альтернатив (объектов), а известно только бинарное отношение предпочтения между элементами (объектами) указанного множества. При этом имеющейся информации об объектах (альтернативах) в виде отношения предпочтения между ними недостаточно для принятия окончательного решения о выборе «хороших» объектов, то есть возникает типичная ситуация, когда нам известно, что значит «лучше», но неизвестно, что значит «хорошо». Поэтому для решения задачи выбора «хороших» объектов необходимо иметь принципы выбора (принципы оптимальности), которые и позволяют произвести необходимый выбор.

В данной учебно – методической разработке приводятся некоторые специальные свойства бинарных отношений, обсуждаются вопросы, связанные с выявлением и описание предпочтений на языке отношений, рассматриваются принципы выбора (оптимальности) такие как принципы недоминируемости, Неймана – Моргенштерна, ранжирования. Приводятся алгоритмы, позволяющие осуществлять построение «хороших» решений на основе указанных принципов.

Некоторые свойства бинарных отношений

Рассмотрим случай, когда на множестве возможных альтернатив , отождествляемого с множеством возможных исходов, (будем предполагать, что это множество конечно) задано бинарное отношение, позволяющее попарно сравнивать возможные альтернативы.

Напомним, что бинарным отношением на множестве  называется подмножество множества , где есть множество всех упорядоченных пар элементов из множества .

Бинарные отношения (в дальнейшем просто отношения) мы будем задавать либо перечисляя все входящие в него пары, либо с помощью графа или булевой матрицы. Кроме того, для задания отношений мы будем использовать матрицы специального вида.

Для обозначения отношений будем в основном использовать греческие прописные буквы , , ,  и т.д.

Пусть  - произвольное отношение на множестве  и  . Множество тех элементов из , с которыми элемент  находится в отношении , называется срезом (или сечением) отношения  через элемент  и обозначается .

Так как бинарные отношения являются множествами, то к ним применимы все понятия и операции, которые вводятся для множеств. Кроме теоретико-множественных операций для отношений вводятся некоторые дополнительные операции, которые связаны с их специфической структурой. Мы будем использовать две такие операции.

1. Обращение отношений. Если в каждой упорядоченной паре, принадлежащей отношению , поменять местами первую и вторую компоненты, то получим новое отношение, которое называется обращённым для отношения  и обозначается через .
2. Умножение отношений. Назовём две упорядоченные пары  и  примыкающими, если первая компонента второй пары совпадает со второй компонентой первой пары. Для двух примыкающих упорядоченных пар  и  их произведением называется пара . Пусть теперь  и – два бинарных отношения, заданных на множестве . Произведением отношения  на отношение  называется новое отношение, состоящее из результатов произведений всех таких примыкающих пар, первая из которых принадлежит отношению , а вторая – отношению . Произведение отношения  на отношение  обозначается . Таким образом, условие () означает, что для некоторого элемента  выполняется, что ,.

Произведение отношений, вообще говоря, некоммутативно (то есть зависит от порядка сомножителей), но ассоциативно, то есть для любых трёх отношений , , , заданных на множестве , выполняется  . Ввиду ассоциативности произведения отношений единственным образом определено -кратное произведение отношения  самого на себя, обозначаемое через .

Для выражения матрицы произведения двух отношений, заданных булевыми матрицами, введём в рассмотрение операцию  , определив её так:, , , . Пусть отношения  и , заданные на множестве , состоящем из  элементов, представлены булевыми матрицами  и  () соответственно. Тогда матрица , где  (9.1)

будет булевой матрицей отношения .

Обозначим через  отношение, содержащее пары вида  для всех . Будем называть такое отношение тождественным. Отношение, содержащее всевозможные упорядоченные пары элементов из  будем называть универсальным и обозначать через . И, наконец, через  будем обозначать пустое отношение (отношение, не содержащее никакие пары).

Пусть  – бинарное отношение, заданное на множестве . Перечислим на теоретико-множественном языке основные свойства отношения .

1.  – рефлексивность,
2.  – антирефлексивность,
3.  – симметричность,
4.  – асимметричность,
5.  – антисимметричность,
6.  – транзитивность,
7.  – линейность.

Отношение  называется симметричной частью отношения , а отношение  – асимметричной частью отношения .

Отметим некоторые свойства симметричных и транзитивных отношений.

Свойство 1. Объединение и пересечение любого семейства симметричных отношений является симметричным отношением.

Свойство 2. Обращение транзитивного отношения транзитивно.

Свойство 3. Пересечение любого семейства транзитивных отношений транзитивно.

Для операции аналогичный результат вообще говоря не верен. Введем следующий тип связи между двумя отношениями  и , заданными на множестве : отношение  будем называть транзитивным относительно отношения , если

из ,  следует, что ;

из ,  следует, что ,

где .

Свойство 4. Если два отношения транзитивны и дно из них транзитивно относительно другого, то объединение этих отношений транзитивно.

Свойство 5. Пусть  - транзитивное отношение, заданное на множестве . Тогда

* его симметричная часть  транзитивна;
* его ассиметричная часть  транзитивна;
* транзитивно относительно .

Дальнейшее выделение важных классов отношений производится с помощью комбинирования описанных выше свойств. Рассмотрим некоторые из таких классов отношений.

Отношением толерантности называется отношение , которой одновременно рефлексивно и симметрично: ,  . Отношение , которое рефлексивно и транзитивно (,  ) называется отношением квазипорядка. Если отношение квазипорядка  удовлетворяет условию антисимметричности (), то оно называется отношением порядка.

Если бинарное отношение  обладает сразу тремя свойствами: рефлексивностью (), симметричностью (), транзитивностью ( ), то оно называется отношением эквивалентности (эквивалентностью).

Существует тесная связь между отношениями эквивалентности на множестве и разбиениями этого множества на попарно непересекающиеся классы (семейство  непустых подмножеств множества  называется разбиением множества , если каждый элемент из  принадлежит точно одному подмножеству . При этом подмножества  называются классами разбиения).

1. Пусть  – разбиение множества . Тогда отношение , определённое на  следующим образом:  тогда и только тогда, когда  и  находятся в одном классе разбиения, является отношением эквивалентности на множестве .
2. Пусть  – некоторое отношение эквивалентности на . Поставим в соответствие каждому элементу  подмножество множества , состоящее из тех элементов, которые находятся с элементом  в отношении  (указанное подмножество есть не что иное, как срез  отношения  через элемент ). Тогда семейство различных подмножеств  является разбиением множества .
3. Построенное соответствие между разбиениями множества  и отношениями эквивалентности на  является взаимно-однозначным (биекцией).

При этом классы разбиения, соответствующего отношению эквивалентности , называют также классами отношения эквивалентности , а множество всех классов отношения эквивалентности  называется фактор-множеством и обозначается через . Если  – отношение эквивалентности на , то два элемента  находятся в отношении  тогда и только тогда, когда соответствующие им классы эквивалентности  совпадают:

 (1)

Пусть на множестве  задано отношение  и  – некоторое отношение эквивалентности на , (, , ). Определим на фактор-множестве  бинарное отношение  следующим образом:

 (2)

Про отношение  говорят, что оно получено в результате факторизации отношения  по эквивалентности  и называют фактор-отношением.

Будем говорить, что некоторое свойство отношения , заданного на множестве , сохраняется при факторизации, если из того, что этим свойством обладает отношение , следует, что им будет обладать и фактор-отношение  при любой эквивалентности , заданной на .

Лемма 1. Свойство линейности сохраняется при факторизации.

Лемма 2. Свойства рефлективности и симметричности сохраняются при факторизации.

Факторизация транзитивного отношения может не приводить к транзитивному отношению.

Лемма 3. Факторизация транзитивного отношения  по содержащейся в нём эквивалентности  ( ) даёт транзитивное отношение.

Пусть  – отношение квазипорядка, заданное на множестве .

Лемма 4. Симметричная часть  квазипорядка  есть отношение эквивалентности.

Заметим, что из транзитивности квазипорядка  и условия  следует, что  транзитивно относительно :

;

.

Таким образом, для любой пары её принадлежность к отношению  не меняется при замене каждой компоненты этой пары элементом, эквивалентным относительно . Поэтому для определения принадлежности пары классов  эквивалентности  к фактор-отношению  можно выбрать любые элементы из этих классов в частности, так как всегда , , ибо получаем равносильность

 (3)

При построении факторизации отношения квазипорядка  по его симметричной части  удобнее использовать формулу (3), чем прямое определение фактор-отношения (2). Из (3), в частности следует, что линейность фактор-отношения  равносильна линейности отношения .

Теорема 1. Факторизация отношения квазипорядка по его симметричной части даёт отношение порядка на фактор-множестве.

Пример 1.

Пусть квазипорядок  на множестве  задан графом:











Построим отношение порядка  на фактор-множестве, где :



























**Отношения достижимости и взаимной достижимости. Алгоритм выделения контуров графа.**

Пусть  - граф отношения  . Последовательность (конечная или бесконечная) его вершин  называется путем в графе , если каждая вершина этой последовательности состоит в следующей за ней вершиной в отношении , т.е. если  для . При этом  называется начальной вершиной пути и если указанная последовательность обрывается на элементе , то  называется конечной вершиной пути, а число  называется длиной пути. Путь из  в  можно записать в виде

. (4)

Итак, образно говоря, длина пути равна числу «шагов» в (4).

Говорят, что вершина  достижима из вершины  если в графе  существует путь из  в . Для каждого отношения  через  обозначим его отношение достижимости:  тогда и только тогда, когда вершина  достижима из вершины . Срез  есть множество вершин, достижимых из вершины . Отметим, что всегда , то есть каждая вершина достижима из самой себя: соответствующий путь есть  (его длина равна нулю). Через  обозначим отношение взаимной достижимости:  тогда и только тогда, когда вершина  достижима из вершины  и вершина  достижима из вершины .

Лемма 5. Для всякого бинарного отношения  его отношение достижимости  является отношением квазипорядка, а отношение взаимной достижимости  – отношением эквивалентности.

Опишем классы эквивалентности . Пусть в графе , содержащем по крайней мере две различные вершины и в котором начальная и конечная вершины совпадают, назовём нетривиальным контуром, а петли графа  будем называть тривиальными контурами. Таким образом, под контуром графа  будем понимать либо тривиальный, либо нетривиальный контур. В терминах контуров можно дать следующее описание классов эквивалентности : каждый класс состоит либо из одного элемента множества , либо два различных элемента множества  (две различные вершины графа ) находятся в одном классе эквивалентности  тогда и только тогда, когда существует нетривиальный контур, проходящий через эти вершины.

Будем говорить, что отношение  удовлетворяет условию отсутствия нетривиальных контуров (является ацикличным), если граф этого отношения не содержит нетривиальных контуров, то есть если для любой последовательности  его вершин выполняется

, , …, ,  (5)

Из приведённого выше описания классов эквивалентности  следует, что отношение  является ацикличным тогда и только тогда, когда его отношение взаимной достижимости  является тождественным отношением () на множестве. Так как отношение  представляет собой симметричную часть отношения достижимости , то получаем, что справедлива

Лемма 6. Отношение  удовлетворяет условию отсутствия нетривиальных контуров (5) (является ацикличным) тогда и только тогда, когда его отношение достижимости  антисимметрично, то есть когда  является отношением порядка.

Для всякого отношения  из выполнения условия (4) следует условие антисимметричности. Если же отношение  транзитивно, то справедливо и обратное утверждение.

В частности, граф отношения порядка не имеет нетривиальных контуров.

Теорема 2. Если линейное отношение удовлетворяет условию отсутствия нетривиальных контуров, то оно транзитивно.

Перечислим простые свойства отношения достижимости, на которых основан алгоритм выделения контуров графа.

Свойство 6 Для графа, содержащего  вершину, свойства «достижимость» и «достижимости не более чем за  шагов» равносильны.

Свойство 7 Если отношение  рефлексивно, то в графе  свойства «достижимость за  шагов» и «достижимость не более чем за  шагов» равносильны.

Непосредственно из свойств (6) и (7) следует.

Свойство 8. Пусть -рефлексивное отношение на множестве, содержащем  элемент и . Для того, чтобы вершина  была достижима в графе  из вершины , необходимо и достаточно, чтобы  была достижима из  точно за  шагов.

Свойство 9. Две вершины  графа  находятся в отношении взаимной достижимости  тогда и только тогда, когда для любой вершины графа её достижимость из  равносильна её достижимости из , то есть



Пусть  – произвольное отношение на множестве, состоящее из  элемента. Обозначим через  отношение, полученное из отношения  добавлением петель во всех вершинах графа , где петли отсутствуют. Ясно, что

 ,.

По свойству 9

.

Поскольку  рефлексивно, то по свойству 8 выполняется . Получаем окончательно



Так как контуры графа  определяются классами эквивалентности , то равносильность выражения приводит к следующему алгоритму выделения контуров.

Задаём отношение  с помощью булевой матрицы. Напомним, что произведению отношений соответствует булево произведение матриц (формула (1)). Поэтому отношение  представляется матрицей. Заметим, что равенство срезов  означает совпадение строк элементов  и  в матрице. Таким образом получаем, что каждый класс эквивалентности  состоит из элементов, котором соответствуют одинаковые строки матрицы . Любые элементы класса эквивалентности  лежат на одном контуре графа .

Предположим, что для некоторого  имеет место равенство . Тогда отчасти следует, что. Поэтому для нахождения матрицы  можно находить последовательно степени матрицы  до тех пор, пока две последовательные степени не окажутся одинаковыми.

Пример 2.

Пусть на множестве  отношение  задано графом:









Построим фактор-множество , где .

Булева матрица  отношения  имеет вид:

,

,.

Таким образом, имеем два класса эквивалентности: ,  и .

Продолжим рассмотрение отношений достижимости и взаимной достижимости. Пусть  – бинарное отношение на множестве , а  – отношение эквивалентности на . Сравним два отношения:  и  (разница между этими отношениями состоит в том, что  есть факторизация по  отношения достижимости , а  – отношение достижимости, построенное для фактор-отношения  на фактор-множестве .

Всегда выполняется включение . Действительно, пусть , то есть имеется пара , где ,  ( ). По определению отношения достижимости  существует цепочка  , , …,  ( ). Для соответствующих классов эквивалентности  имеем

 , , …, 

Получаем, что в графе  существует путь из класса  в класс, т.е.  , а так как , , то ,  и .

Обратное включение может не выполняться, что видно из следующего примера.

Пример 3.

Пусть отношение  на множестве  задано графом









Зададим эквивалентность  на  путём разбиения этого множества на классы: , , . Тогда графы отношений  на множестве  и графы отношений , ,  имеют вид:



































Легко понять, почему включение  может не выполняться. Как известно факторизация транзитивного отношения  может не приводить к транзитивному отношению (лемма 3), а отношение  обязательно транзитивно. Однако, если отношение  оказывается транзитивным, то выполняется и включение .

Действительно, так как  , то и , а если отношение  транзитивно, то из последнего включения получаем .

Пусть теперь в качестве эквивалентности, по которой производится факторизация отношения  выбрано отношение его взаимной достижимости, то есть . Тогда выполняется включение  и по лемма 3 отношение  получается транзитивным и выполняется равенство . Но  есть не что иное, как результат факторизации отношения квазипорядка  по его симметричной части, поэтому (см. леммы 4 – 5 и теорему 1) оно является отношением порядка и, в частности, антисимметрично. Получаем, что отношение  антисимметрично, что согласно лемме 6 равносильно отсутствию нетривиальных контуров в графе  . Таким образом, справедлива

Теорема 3. Факторизация любого отношения  по отношению его взаимной достижимости приводит к ацикличному фактор-отношению, то есть удовлетворяющему условию отсутствия нетривиальных контуров.

Из теоремы 3 вытекает

Теорема 4. Если  – линейное отношение на множестве , то его факторизация по отношению его взаимной достижимости  представляет собой линейное отношение порядка на фактор-множестве .

Выявление и описание предпочтений на языке отношений

Перейдём теперь к рассмотрению вопросов, связанных с описанием предпочтений на языке отношений. При изучении отношения предпочтения между реальными объектами (элементами множества ) в нём можно выделить две стороны: одна отражает превосходство (равнозначные по смыслу термины – преобладание, доминирование) одного объекта над другим, а другая – сходство (равнозначные термины – безразличие, индифферентность) объектов. Другими словами, можно выделить два отношения между объектами, которые в дальнейшем будем называть отношением доминирования и отношением безразличия. Приведём пример.

Турнир, где результатом встречи двух участников является выигрыш одного из них или ничья. На множестве участников турнира следующим образом определяются отношения доминирования и безразличия: доминирует , что означает, что  выиграл у ;  и  безразличны означает, что  и  сыграли в ничью.

Обозначим через  отношение доминирования ( означает, что  доминирует ); через  отношение безразличия ( означает, что  и  безразличны). Отметим ряд существенных свойств, которыми обладают эти отношения.

Во-первых, отношение доминирования ассиметрично:  .

Во-вторых, отношение безразличия симметрично: . Например, если  сыграл в ничью с , то и  сыграл в ничью с , если возраст  близок к возрасту , то и возраст  близок к возрасту .

В-третьих, ни одна пара объектов (элементов множества ) не принадлежит одновременно и отношению доминирования, и отношению безразличия, т.е. .

Наконец, наложим еще одно условие на отношение  : будем считать, что каждый объект безразличен по отношению к самому себе (т.е. отношение безразличия рефлексивно).

Определение 1.

Будем говорить, что пара отношений , заданных на множестве , определяет на этом множестве структуру «доминирование-безразличие» и называть  отношением доминирования, а  - отношением безразличия, если  ассиметрично,

 симметрично и рефлексивно (т.е. является отношением толерантности), .

Легко заметить, что если  - структура «доминирование-безразличие» на множестве , то пара  также образует структуру «доминирование-безразличие» на множестве;  будем называть отношением доминируемости. Для целей логического анализа в принципе безразлично, что принять за доминирование, а что за доминируемость.

Важным является такое свойство структуры «доминирование-безразличие», когда любые два объекта из рассматриваемого множества или безразличны, или один доминирует другой. Такую структуру «доминирование-безразличие» будем называть линейной. Удобно выразить свойство линейности структуры «доминирование-безразличие», введя понятие сравнимости объектов. Объекты  и  называются сравнимыми, если они или безразличны, или один из них доминирует другой; в противном случае объекты  и  называются несравнимыми.

Множество пар сравнимых объектов образуют отношение сравнимости, а множества пар несравнимых объектов – отношение несравнимости. Структура «доминирование-безразличие» на  будет линейной, тогда и только тогда, когда любая пара объектов сравнима, т.е. когда отношение сравнимости есть . Вообще, для любых двух объектов  и , произвольно взятых из множества, на котором задана структура «доминирование-безразличие», выполняется точно одно из следующих условий:

1.  доминирует ;
2.  доминирует ;
3.  и  безразличны;
4.  и  несравнимы.

В случае линейной структуры выполняется точно одно из первых трех условий.

Структуру «доминирование-безразличие» удобно представить с помощью таблицы следующего типа (матрица доминирований – безразличий): в клетке, соответствующей строке элементу  и столбцу элемента , ставится 1, если  доминирует ; 0, если  доминирует ;  , если  и  безразличны, т.е. матрица доминирований-безразличий строится по тому же принципу, что и таблица спортивных турниров. Отметим, что структура «доминирование-безразличие» будет линейной тогда и только тогда, когда в представляющей её матрице нет пустых клеток.

Пусть  - структура «доминирование-безразличие» на множестве . Положим . Отметим, что исходные отношения  и  могут быть «восстановлены», если известно их объединение:  есть ассиметричная, а  - симметричная часть отношения . Таким образом, всякая структура «доминирование-безразличие» может быть задана с помощью одного бинарного отношения – объединения отношений доминирования и безразличия.

Определение 2.

Объединение отношений доминирования и безразличия будем называть отношением предпочтения.

Из сказанного выше следует, что отношение предпочтения не только определяется структурой «доминирование-безразличие», но и полностью определяет её.

Возникает естественный вопрос: какими свойствами характеризуется отношение предпочтения? Другими словами, если  - произвольное отношение на множестве , то каковы необходимые и достаточные условия того, что чтобы для некоторой структуры «доминирование-безразличие» , определенной на , выполнялось ? Конечно, необходимо чтобы отношение  было рефлексивным (поскольку  рефлексивно). Оказывается, что больше никаких условий на отношение  накладывать не надо, а именно, всякое рефлексивное отношение  является отношением предпочтения для некоторой структуры «доминирование-безразличие». Действительно, пусть - асимметричная часть,  - симметричная часть рефлексивного отношения . Тогда отношение  асимметрично,  симметрично и рефлексивно и ; получаем, что пара отношений  образует на множестве  структуру «доминирование-безразличие»; соответствующее ей отношение предпочтения есть первоначально заданное отношение : .

Таким образом, в принципе всякое отношение можно рассматривать как отношение предпочтения; надо только вначале превратить его в рефлексивное, добавив отсутствующие петли, и взять в качестве доминирования ассиметричную часть, а в качестве безразличия – симметрическую часть полученного отношения. При этом линейность этого отношения равносильна линейности соответствующей ему структуры «доминирование-безразличие».

Легко видеть, что отношения доминирования и безразличия могут быть нетранзитивными. Поэтому естественно выделить такие структуры «доминирование-безразличие», в которых эти отношения транзитивны.

Кроме того, наложим ещё одно требование: для всякой пары объектов, принадлежащей отношению доминирования, замена одного из объектов безразличным ему сохраняет доминирование, т.е.

,

.

(Приведенные условия выражают транзитивность отношения  относительно отношения .)

Будем называть структуру «доминирование-безразличие» транзитивной, если отношения доминирования и безразличия транзитивны и отношение доминирования транзитивно относительно безразличия. Выясним, что представляют собой отношения предпочтения для транзитивных структур «доминирование-безразличие». Если  и  транзитивны и  транзитивно относительно отношения , то  будет транзитивным отношением (свойство 4); кроме того, отношение  рефлексивно как всякое отношения предпочтения, таким образом  - отношение квазипорядка. Обратно, пусть  - произвольное отношение квазипорядка на множестве . По свойству 5 асимметричная часть  и симметричная часть  транзитивного отношения  будут транзитивными

И  транзитивно относительно ; получаем, что структура «доминирование-безразличие» , соответствующая отношению , является транзитивной. Вывод: соответствие  является взаимно-однозначным соответствием биекцией между транзитивными структурами «доминирование-безразличие» на множестве  и отношением квазипорядка на множестве ; задание транзитивной структуры «доминирование-безразличие» равносильно заданию одного отношения квазипорядка. Если при этом отношение безразличия тождественно (т.е. каждый объект безразличен только сам с собой), то соответствующее отношение квазипорядка является отношением порядка.

Рассмотрим теперь более детально отношение порядка, т.е. такое отношение, которое одновременно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично.

Определение 3.

Множество , на котором задано отношение порядка , называется упорядоченным и записывается в виде пары .

Так как для всякого отношения порядка  его симметричная часть  является тождественным отношением, то его асимметричная часть  (строгий порядок) определяется условием

.

Учитывая, что важнейшим и наиболее привычным примером отношения порядка является естественный порядок между действительными числами, будем иногда и для произвольного порядка  писать  вместо  и  вместо  (или просто  и , если ясно, о каком отношении порядка идёт речь).

Для отношений порядка имеется более простое геометрическое представление, чем представление с помощью графов; оно состоит в следующем. Говорят, что элемент  покрывает элемент  (или что элемент  покрывает элемент ), и пишут , если, во-первых,  и, во-вторых, между ними нет никакого другого элемента, т.е. не существует такого , что . Таким образом, «покрывание» - это новое отношение, которое строится на базе отношения порядка . Так, для естественного отношения порядка на множестве целых чисел одно целое число покрывает другое, если первое больше второго на единицу; если отношение порядка – делимость, то , означает, что  - простое число; если отношение порядка – включение множеств, то , означает, что множество  получено из множества  добавлением одного элемента.

Для отношения порядка, заданного на конечном множестве, имеет место следующее утверждение: условие  выполняется тогда и только тогда, когда существует конечная последовательность элементов множества , которая начинается с элемента , кончается элементом  и в которой каждый член покрывает последующий:

 существует цепочка . (6)

Диаграмма отношения  (или, что то же самое, диаграмма упорядоченного множества ) строится следующим образом. Элементы множества  изображаются точками на плоскости и всякие две точки , для которых выполняется , соединяются наклонным отрезком, идущим вниз от  к .

Из (6) вытекает следующее простое правило: условие  выполняется тогда и только тогда, когда на диаграмме упорядоченного множества можно попасть из  в , двигаясь по отрезкам прямых только вниз. Так, для упорядоченного множества, диаграмма которого изображена на рисунке 1 имеем: ,  и т.д. Условие  , однако не выполняется (хотя геометрически  выше, чем ) : требуемого пути из в  нет.













Рисунок 1

В дальнейшем мы будем использовать следующее обстоятельство: если  - отношение порядка, то обратное отношение  также будет отношением порядка; его диаграмма получается из диаграммы первоначального отношения порядка переворачиванием её «вверх ногами».

Рассмотрим произвольное упорядоченное множество .

Определение 4.

Элемент множества  называется максимальным, если не существует строго большего его элемента, т.е. элемент  максимален , когда условие  не выполняется ни для какого .

Определение 5.

Элемент множества  называется наибольшим элементом, если он больше любого другого элемента, т.е. если для всякого  выполняется .

Для упорядоченного множества, представленного диаграммой на рисунке 1 имеется два максимальных элемента , , а наибольший элемент отсутствует; таким образом, понятия «максимальный» и «наибольший», которые в обыденной практике считаются равнозначными, в теории упорядоченных множеств оказываются различными. Между понятиями «максимальный» и «наибольший» элемент имеется следующая простая связь.

Теорема 5. Если в упорядоченном множестве имеется наибольший элемент, то он является единственным максимальным элементом. Обратно, если в конечном упорядоченном множестве имеется единственный максимальный элемент, то он будет и наибольшим элементом.

Если отношение порядка  линейно, то упорядоченное множество  называется линейно упорядоченным или цепью. Таким образом, в цепи каждые два элемента сравнимы: для любых  выполняется  или . Как выглядит диаграмма линейно упорядоченного множества? Заметим, что в любом упорядоченном множестве, если два элемента покрывают один и тот же элемент, то они несравнимы. Действительно, пусть  и ; предположим, что . Тогда , что противоречит условию . Таким образом, в линейно упорядоченном множестве ни один элемент не может покрываться двумя элементами. С другой стороны, если множества  конечно, то для всякого элемента, отличного от максимального, имеется элемент, который его покрывает. Поэтому диаграмма конечного линейной упорядоченного множества имеет вид, представленный на рисунке 2, т.е. диаграмма может быть выгнута в линию.

Отметим ещё следующее легко проверяемое свойство: в линейно упорядоченных множествах понятия «максимальный» и «наибольший» равнозначны.

Рисунок 2

Пример 4.

Пусть на множестве  линейный порядок «» задан графом:







Тогда диаграмма упорядоченного множества  имеет вид:







Принципы недоминирования и Неймана - Моргенштерна

Когда говорят о предпочтении некоторого индивидуума, то предполагают, что имеется определённое множество объектов, состояний, ситуаций, альтернатив и т.п., среди которых это предпочтение возникает. В наших задачах, для упрощения терминологии, мы будем далее говорить о предпочтении на множестве объектов, ассоциированным с множеством альтернатив.

Выявить предпочтение на множестве объектов  – значит указать множество всех тех пар объектов , для которых объект  предпочтительнее объекта , то есть задать отношение предпочтения в явном виде. Мы будем понимать предпочтение как нестрогое, то есть считать, что отношение предпочтения содержит как все пары , где объект  доминирует объект  и где объекты  и  безразличны между собой. Пусть  - отношение предпочтения,  - отношение доминирования, а  – отношение безразличия; при этом отношение  представляет собой асимметричную часть, а  – симметричную часть отношения  . При выявлении предпочтений может быть два подхода к отношению безразличия. Можно считать

1. что любые два объекта, для которых не установлено доминирования (ни в том, ни в другом порядке) безразличны;
2. что безразличными являются лишь некоторые пары объектов, для которых не установлено доминирования.

Разница между первым и вторым подходом в том, что при первом подходе безразличие рассматривается просто как логическая противоположность доминирования и структура «доминирование – безразличие» получается автоматически линейной; при втором подходе безразличие рассматривается как самостоятельное отношение и возникает отношение несравнимости объектов. Таким образом, при втором подходе проводится более тонкая дифференциация объектов.

Рассмотрим теперь некоторые методы выявления предпочтений. Предположим, что мы выявляем предпочтение индивидуума на множестве объектов . В некоторых случаях индивидуум может провести попарное сравнение всех объектов этого множества, указав для каждой пары  наличие или отсутствие предпочтения между  и .

Однако метода попарных сравнений как метод выявления предпочтений может быть использован далеко не всегда, а лишь в тех случаях, когда основой для выявления предпочтений индивидуума без анализа каких-либо доводов или причин наличия (отсутствия) предпочтений между конкретными объектами. Но лишь в особых случаях можно полагаться на субъективные представления, не подкреплённые никакими логическими доводами. Следует иметь в виду, что часто тот индивидуум, предпочтения которого выявляются, выступает не как «личность», а как «носитель интересов» определённой организации (скажем, при выявлении предпочтений директора предприятия мы интересуемся не его личными предпочтениями, а предпочтениями того предприятия, которое он представляет). Поэтому в этих случаях выявление предпочтений должно базироваться на логической, а не психологической основе.

Сложность объектов, среди которых приходится устанавливать предпочтение, делает подчас практически невозможным их непосредственное сопоставление, сравнение одного с другим. В этих случаях у рассматриваемых объектов стараются выделить существенные показатели и сравнение объектов проводят на основании сравнения значений этих показателей. При этом объект рассматривается просто как набор соответствующих ему значений показателей, а не как единое целое, что имеет место при попарных сравнениях.

При сравнении объектов по значениям показателей первичная информация может быть задана таблицей значений показателей, где  – данные объекты,  – рассматриваемые для них показатели. В клетке, соответствующей объекту  и показателю , записывается значение показателя  для объекта. В этом случае вся информация об объекте заключена в векторе соответствующих ему значений показателей и сравнение объектов производится с помощью сравнения этих векторов, т.е. строк таблицы показателей.

Важно отметить, что задание информации об объектах в виде таблицы показателей ещё не определяет предпочтения между объектами. Для выявления этого предпочтения необходима некоторая совокупность правил, которая позволила бы для любых двух объектов  и  установить, предпочитается ли объект  объекту  или нет. Такую совокупность правил будем называть системой решающих правил.

Пусть интересующие нас объекты оцениваются по  числовым показателям;  – значение -го показателя для объекта . Будем считать, что для каждого показателя предпочтение по нему связано с увеличением значения этого показателя. Предпочтение, полученное по следующему решающему правилу: объект  считается предпочтительнее объекта  тогда и только тогда, когда для всех рассматриваемых показателей  выполняется , будем называть абсолютным предпочтением для векторного критерия. Это название оправдано тем, что при таком решающем правиле один объект считается предпочтительнее другого только в том случае, когда для первого все показатели лучше, то есть когда можно признать первый объект «абсолютно лучше» второго. К сожалению, решающее правило по абсолютному предпочтению является достаточно «слабым», то есть число (различных) объектов, среди которых оно устанавливает предпочтение, невелико.

Важной стороной абсолютного предпочтения является то, что оно всегда транзитивно.

Если применение в качестве решающего правила абсолютного предпочтения ничего не даёт, то для получения непустого отношения доминирования надо взять решающее правило, более сильное, чем абсолютное предпочтение. Довольно естественными представляется произвести такое усиление на следующем пути. Раз ни один из объектов не превосходит другого сразу по всем показателям, то будем считать, что для установления предпочтения одного объекта над другим достаточно превосходства по большинству из рассматриваемых показателей – соответствующее предпочтение будем называть предпочтением по правилу большинства.

Теперь обратим внимание на то обстоятельство, что использование вышеприведённых решающих правил фактически требует знания не численных значений показателей, а лишь соотношения их по величине, то есть их упорядоченности. Поэтому наш анализ не изменится, если мы для каждого показателя укажем не его числовое значение, а степень проявления, выраженную в условных единицах, то есть перейдём к балльным оценкам. При это для каждого показателя надо установить определённое число градаций (уровней различия). В качестве низшего балла можно взять 1, а при переходе к следующему уровню балл увеличиваем на единицу. Таблица показателей, значения которых выражены в баллах, называется таблицей балльных оценок. Отметим, что таблицу балльных оценок можно трактовать как результат не только оценки объектов одним индивидуумом по различным показателям, но и суммарной оценки этих объектов разными индивидуумами (экспертами).

Для иллюстрации метода балльных оценок рассмотрим пример выделения предпочтения на множестве из семи моделей автомобилей.

Пример 5.

Выявляется предпочтение индивидуума (показателя) среди семи моделей автомобилей, обозначаемых буквами  то есть .



Таблица 1



Таблица .2

Эти модели оцениваются по следующим четырём показателям:  – цена,  – размер автомобиля,  – мощность двигателя,  – дизайн. Пусть таблица 1 является таблицей балльных оценок. Введём следующую систему решающих правил: считаем, что объект  доминирует объект , если

1. число показателей, по которым объект  строго лучше объекта, больше, чем число показателей, по которым объект  строго лучше объекта,
2. для объекта  ни один из показателей не принимает наименьшего из возможных значений (то есть значения 1).

Из 1 следует, что те показатели, по которым объект  не хуже объекта , составляют большинство среди всех рассматриваемых показателей. Однако при выполнении этого условия может оказаться, что по тем показателям, по которым объект  хуже объекта , разница (которая будет не в пользу объекта ) значительна; чтобы уменьшить число таких случаев при отдаче предпочтения в пользу , вводится условие 2. При указанной системе решающих правил отношение , выражающее доминирование, определяется матрицей табл. 2. Заметим, что условие 1 влечёт асимметричность отношения , виду чего его можно рассматривать как отношение доминирования.

Подведём некоторые итоги рассмотрения круга проблем, связанных со способами выявления предпочтений на множестве объектов, когда исходная информация об объектах задана с помощью таблицы значений показателей в виде абсолютных или балльных оценок.

Для нахождения предпочтения в форме отношения необходимо задание некоторого решающего правила не существует; имеется, однако, много конкретных типов решающих правил. В каждом случае выбор решающего правила производится на основе содержательных соображений. Процедура выбора решающего правила не формализована и представляет собой сложную концептуальную проблему.

Вернёмся к задачам принятия решений. Предположим, что имеется множество объектов , на котором уже выявлено предпочтение и задано в форме бинарного отношения  на этом множестве. Пусть мы имеем задачу принятия решения, в которой элементы множества  являются альтернативами, отождествлённые с исходами. Тогда принятие решения сводится к выбору альтернативы, то есть к выбору конкретного объекта из . Какой объект следует выбрать или точнее, выбор какого объекта будет оптимальным?

На первый взгляд может показаться, что здесь вообще нет никакой проблемы: раз мы можем выбрать любой объект из , то оптимальным будет выбор самого предпочтительного объекта, то есть того объекта, который предпочтительнее (относительно введённого отношения предпочтения) любого другого. Однако вся «неприятность» в том, что такого объекта может попросту не оказаться, что легко видеть, когда в качестве отношения предпочтения между объектами выступает абсолютное предпочтение для векторного критерия по показателям.

Как же быть тогда, когда наиболее предпочтительный относительно введённого предпочтения объект отсутствует? Предлагается такой выход. Раз нет наиболее предпочтительного, то есть наилучшего объекта, то постараемся указать не наилучший, а «хороший» объект, точнее, некоторое подмножество «хороших» объектов. Сделать это непосредственно не представляется возможным, так как имеющаяся у нас информация об объектах – в форме отношения предпочтения – позволяет лишь сравнивать объекты попарно, то есть позволяет указать, какой объект лучше другого, но не позволяет указать, какой объект является «хорошим» (то есть мы сталкиваемся здесь с довольно распространённой в реальной жизни ситуацией, когда известно, что значит «лучше», но не известно, что значит «хорошо»). Поэтому необходимо иметь некоторый принцип, позволяющий выделить подмножество «хороших» объектов; в формулировке этого принципа должны содержаться требования, которые предъявляются обычно к «хорошим» – с интуитивной точки зрения – объектам. Ясно, что такой принцип можно рассматривать как принцип оптимальности для задачи выбора объекта при заданном предпочтении.

Пусть  – отношение предпочтения, заданное на некотором множестве . Асимметричная часть отношения  есть  – отношение доминирования на .

Определение 4.

Элемент  называется недоминируемым, если он не доминируется никаким другим элементом, то есть если не существует такого , что .

Принцип недоминируемости: в качестве множества «хороших» объектов берётся множество недоминируемых элементов.

Рассмотрим в качестве примера применение принципа недоминируемости для абсолютного предпочтения по векторному критерию, считая, что «лучше» означает «больше». Тогда нетрудно видеть, что множество недоминируемых элементов есть множество эффективных точек.

Заметим ещё, что если отношение предпочтения  есть отношение порядка на множестве , то соответствующее этому предпочтению отношение доминирования совпадает с отношением строгого порядка; таким образом, в этом случае понятие «недоминируемый элемент» тождественно понятию «максимальный элемент». Что можно сказать о существовании максимальных элементов в упорядоченном множестве? В конечном упорядоченном множестве всегда имеются максимальные элементы: идя по диаграмме упорядоченного множества только вверх, мы обязательно придём к максимальному элементу.

Отметим также, что в примере 5 единственным недоминируемым элементом множества  является элемент .

Принцип недоминируемости, используемый для выделения подмножества «хороших», обладает рядом недостатков. Во-первых, даже в случае конечного множества объектов подмножество недоминируемых объектов может оказаться пустым. Например, для доминирования, представленного графом на рис. 11.1 для каждого элемента имеется доминирующий его элемент. Во-вторых, недоминируемый элемент может не удовлетворять следующему требованию, которое должно, с интуитивной точки зрения, выполняться для «хорошего» объекта: «хороший» объект должен быть лучше, чем любой другой объект, который таковым не является.









Рисунок 3

Рассмотрим теперь второй принцип выделения подмножества «хороших» объектов.

Пусть по-прежнему на множестве  задано отношение предпочтения.

Определение 5.

Подмножество  называется внутренне устойчивым, если для любых двух различных элементов из  ни один из них не предпочитается другому в рамках заданного отношения предпочтения.

Определение 6.

Подмножество называется внешне устойчивым, если для каждого элемента вне  найдётся такой элемент в , который его предпочтительней в рамках заданного отношения предпочтения.

Определение 7.

Подмножество , которое одновременно внутренне и внешне устойчиво, назовём ядром отношения.

Принцип решения по Нейману-Моргенштерну: в качестве подмножества «хороших» объектов берётся такое подмножество, которое является ядром отношения.

Сформулированный принцип требует, чтобы, во-первых, никакие два «хороших» объекта не были сравнимы по предпочтению между собой, и, во-вторых, чтобы для каждого объекта, не попавшего в число «хороших», нашёлся более предпочтительный объект, попавший в число «хороших».

В отличие от принципа недоминируемости, принцип решения по Нейману-Моргенштерну основан на свойстве не отделённого элемента, а некоторой их совокупности. Другими словами, приняв этот принцип, мы не можем сказать, что отдельный элемент является (или не является) «хорошим», но можем сказать про подмножество элементов, что оно является (или не является) подмножеством «хороших» элементов.

Свойства внутренней и внешней устойчивости, которые сформулированы выше для отношения предпочтения, можно ввести для любого бинарного отношения (или порождённого этим бинарным отношением графа).

Пусть  – произвольный граф, порождённый на множестве вершин  бинарным отношением , заданным на этом множестве .

Определение 8.

Подмножество  его вершин называется внутренне устойчивым, если выполняется условие:

.

Определение 9.

Подмножество вершин  указанного графа называется внешне устойчивым, если выполняется условие:

для любого  существует такой элемент , что.

Определение 10.

Подмножество вершин  графа , которое одновременно внутренне и внешне устойчиво называется его ядром.

Ясно, что если  есть отношение предпочтения (то есть  тогда и только тогда, когда  предпочитается ), то ядро графа  представляет собой решение по Нейману-Моргенштерну.

Вообще не всякий конечный граф имеет ядро. Например, в графе, изображённом на рис. 4 ядро отсутствует, так как в нём никакое двухэлементное подмножество его вершин не является внутренне устойчивым (а значит, множество, состоящее из всех трёх вершин, также не будет внутренне устойчивым), а любое одноэлементное подмножество не будет внешне устойчивым. С другой стороны, граф, представленный на рис. 3 имеет два ядра  и .







Рисунок 4

Рассмотрим один из способов нахождения ядра графа. Этот способ связан с понятием степени вершины графа, которое вводится так. Вершины нулевой степени (множество которых будем обозначать через ) – это те вершины, для которых нет исходящих из них дуг (рёбер). Предположим, что уже определено множество вершин . Тогда полагаем

,

где  – срез отношения  через элемент.

Таким образом, для всякого графа определена по индукции расширяющаяся последовательность подмножеств (будем называть их степенными подмножествами:  ). Степенные подмножества можно определять не обязательно по индукции, но и непосредственно, а именно:  тогда и только тогда, когда длина любого пути в графе  из вершины  не превосходит числа . Например, для графа, изображённого на рис. 5 имеется пять степенных подмножеств:

Рисунок 5















, , , ,.

Далее последовательность степенных подмножеств стабилизируется, то есть .

Определяем теперь степень вершины  как наименьшее натуральное число, для которого  (то есть , но ). Другими словами, то, что степень вершины  равна , означает, что длина всякого пути в графе  из вершины  не превосходит  и существует путь из , длина которого равна . Таким образом, в графе  степень имеют те вершины, для которых длины исходящих из них путей ограничены в совокупности.

Возьмём произвольный граф , для которого длины всех путей ограничены в совокупности (в случае, когда множество вершин конечно, для этого необходимо и достаточно, чтобы в графе отсутствовали нетривиальные контура и петли). Тогда имеется натуральное число , которое ограничивает длины всех путей, следовательно, .

Индукцией по степенным подмножествам графа , , …,  определим на множестве вершин графа функцию , принимающую значения 0 и 1, следующим образом.

Полагаем  для всех . Пусть функция  уже определена на всех вершинах графа из подмножества . Выберем  . Полагаем  в том и только в том случае, когда для всех  выполняется равенство . В противном случае полагаем . Так как для  из условия  следует, что, то функция  определена по индукции на любом степенном подмножестве, а значит и на множестве .

Непосредственно проверяется, что множество вершин графа, на которых функция  принимает значения, равные единице, образует единственное ядро графа. Например, для графа, изображённого на рис. 11.3, имеем: , , , , , ,  и следовательно, ядро этого графа .

Заметим теперь, что удаление петель графа не влияет на свойства внутренней и внешней устойчивости подмножеств. Поэтому справедлива

Теорема 6. В конечном графе без нетривиальных контуров существует единственное ядро.

Используя алгоритм выделения ядра графа, найдём ядро отношения  из примера 11.1, где . Зададим отношение  с помощью графа

Граф обратного отношения  истинного подмножества этого графа имеет вид

















, , , , .

















Функция  на вершинах графа  принимает значения: , , , , , , . Следовательно,  есть ядро графа , а  есть ядро отношения.

Пусть теперь в графе  имеются нетривиальные контуры. Как было установлено ранее факторизация отношения  по отношению  его взаимной достижимости приводит к графу  , в котором нетривиальные контура отсутствуют, и для такого графа будет справедлива теорема 6.

Определение 11.

Назовём обобщённым ядром графа  подмножество таких его вершин, которое составляют ядро  графа .

Элементами ядра  будут классы отношения эквивалентности . Обобщённое ядро графа  состоит из тех элементов множества , которые принадлежат классам эквивалентности , попавшим в ядро .

Таким образом для построения «обобщённого ядра» нужно дополнительно использовать алгоритм выделения контуров графа, рассмотренный в лекции 10.

Пусть теперь на множестве  задано отношение . Обобщённым ядром (обобщённым решением по Нейману-Моргенштерну) отношения  будем называть обобщённое ядро графа .

Принципы ранжирования

Под ранжированием объектов обычно понимают расположение их в цепочку по убыванию их ценности, пригодности, важности и т.п. – от самого «хорошего» к самому «плохому». При ранжировании допускается наличие «равноценных» объектов; в этом случае мы разбиваем множество всех объектов на классы «равноценных» объектов и располагаем эти классы в цепочку – от класса самых «хороших» к классу самых «плохих» объектов.

Ясно, что рассмотренную в предыдущей лекции задачу выделения подмножества «хороших» объектов можно трактовать как частный случай задачи ранжирования, при котором множество всех объектов разбивается всего на два класса – класс «хороших» объектов и его дополнение – класс «плохих» объектов; такое ранжирование назовём простым. Геометрически ранжирование объектов представляет собой их размещение по уровням; если уровней всего два – имеем простое ранжирование.

На языке теории бинарных отношений введение ранжирования объектов множества означает задание на этом множестве линейного отношения квазипорядка или, что фактически то же самое, задание линейной транзитивной структуры «доминирование – безразличие», а классы «равноценных» объектов являются классами отношения эквивалентности – симметричной части этого квазипорядка, и геометрическое представление ранжирования можно рассматривать как диаграмму этого квазиупорядоченного множества. При этом для произвольного квазиупорядоченного множества  его диаграмма совпадает с диаграммой упорядоченного множества , полученного факторизацией по эквивалентности , где каждый класс эквивалентности  представлен одной вершиной.

Рассмотрим задачу ранжирования объектов при условии, что задано предпочтение между объектами в форме бинарного отношения. Мы хотим произвести ранжирование объектов таким образом, чтобы оно было согласовано с заданным предпочтением.

Что следует понимать под согласованностью ранжирования с предпочтением? Кажется, естественным считать, что ранжирование согласовано с предпочтением, если более предпочтительные объекты размещены на более высоком уровне. Однако если мы примем данное условие в качестве определения согласованности, то получим, что ранжирования, согласованные с предпочтением, могут существовать лишь для таких отношений предпочтения, в графе которых отсутствуют контура.

Как же следует поступить, когда в графе отношения предпочтения имеются контуры? В этом случае можно предложить несколько вариантов определения согласованности ранжирования с предпочтением, причём каждый из этих вариантов имеет свой интуитивное оправдание и фактически реализует свой принцип оптимальности. Рассмотрим один из методов построения ранжирования, согласованного с предпочтением, выражаемым линейным отношением.

Итак, пусть  – произвольное множество объектов,  – линейное отношение на , выражающее предпочтение между объектами. Напомним, что  здесь – конечное множество. Если отношение  транзитивно, то оно является линейным отношением квазипорядка; тогда, построив диаграмму этого квазиупорядоченного множества, мы получим ранжирование объектов из , причём для любых двух объектов  объект  будет находиться строго выше, чем объект , тогда и только тогда, когда  доминирует  (то есть когда ); объекты  и  будут находиться на одном уровне тогда и только тогда, когда они безразличны между собой (то есть когда ). Такое ранжирование, конечно, надо считать согласованным с предпочтением . Таким образом, решение задачи построения ранжирования, согласованного с предпочтением, становится в этом случае тривиальным.

Пример 6.

Пусть линейное отношение предпочтения  задано на множестве  булевой матрицей .



Используя формулу 1 найдём булеву матрицу  отношения  (булево произведение матрицы на ).



Из вида матриц  и  следует, что выполнено соотношение  (в данном случае ) и, следовательно, отношение  транзитивно, то есть является линейным отношением квазипорядка. Булева матрица отношения эквивалентности, являющейся симметричной частью квазипорядка  представлены ниже.



Таким образом, фактор-множество  состоит из трёх классов:, ,.

Булева матрица, граф фактор-отношения  и диаграмма упорядоченного множества  имеют вид:















В дальнейшем диаграмму упорядоченного множества  мы будем изображать также в виде, когда на ней указываются элементы множества , попавшие в соответствующие классы эквивалентности.

Следовательно, для рассматриваемого примера, с учётом сделанного замечания, вышеприведённую диаграмму мы можем представить так:







Рассмотрим теперь случай, когда линейное отношение  нетранзитивно. Согласно теореме 9.2 лекции 9 это может быть лишь при наличии нетривиальных контуров в графе. Будем решать задачу ранжирования объектов в этом случае в два этапа: на первом этапе проведём «грубое» ранжирование, разбив множество всех объектов на классы «равноценных» объектов и установив линейное упорядочение множества этих классов; на втором этапе проведём «тонкое» ранжирование объектов внутри каждого класса.

Поскольку в рассматриваемом случае граф отношения  содержит нетривиальные контуры, то из чисто содержательных представление становится ясным, что два различных объекта можно принять за «равноценные», если они принадлежат одному контуру графа . Вспомним теперь, что условие принадлежности двух элементов к одному контуру равносильно тому, что эти элементы находятся в отношении взаимной достижимости, поэтому обозначив через  отношение взаимной достижимости отношения , получаем в качестве разбиения на классы «равноценных» объектов разбиение, соответствующее эквивалентности .

В силу теоремы 4 факторизация линейного отношения, заданного на множестве  по отношению его взаимной достижимости  представляет собой линейное отношение порядка на фактор-множестве .

Таким образом, получаем, что если отношение предпочтения  является линейным и нетранзитивным на множестве , то для построения «грубого» ранжирования разбиваем множество  на классы отношения взаимной достижимости  отношения , а в качестве линейного упорядочения этих классов берём факторизацию отношения  по эквивалентности .

При этом для построения соответствующих классов эквивалентности используется алгоритм выделения контуров графа .

Пример 7.

Пусть линейное отношение предпочтения  задано на множестве  булевой матрицей .



Булева матрица  отношения  имеет вид:



Из вида матриц  и  следует, что соотношение  не выполняется и, следовательно, отношение  не является транзитивным.

Булева матрица  и согласно алгоритму выделения контуров графа  получаем два класса эквивалентности отношения взаимной достижимости :,. При этом классу  соответствует тривиальный контур, а классу  – нетривиальный контур графа .

Граф фактор-отношения  и диаграмма линейно упорядоченного множества  (решение задачи «грубого» ранжирования) имеют вид:









Перейдём теперь к описанию второго этапа ранжирования – установлению «тонкого» ранжирования объектов внутри каждого класса, состоящего из тех объектов, которые были признаны равноценными при «грубом» ранжировании. «Тонкое» ранжирование объектов будем осуществлять на основе приписывания каждому объекту некоторого числа, называемого его относительной силой.

Пусть  – класс эквивалентности , являющейся отношением взаимной достижимости линейного отношения , заданного на множестве . Будем считать, что отношение  задано с помощью матрицы доминирований-безразличий, в которой доминирование обозначается через , доминируемость – через , безразличие – .

Напомним, что объекты  и , принадлежащие множеству  называются сравнимыми, если они или безразличны, или один из них доминирует другой. Так как отношение  является линейным, то любая пара объектов из  сравнима.

Пусть всем объектам класса  присвоены номера от  до . Рассмотрим матрицу , представляющую собой часть матрицы доминирований-безразличий, соответствующего объектам класса . Для определения относительной силы объекта класса  учтём вначале число его непосредственных сравнений с другими объектами этого класса. Силой 1-го порядка объекта  () назовём число . Оно представляет собой просто сумму ненулевых элементов -ой строки матрицы. Сила 2-го порядка учитывает число не непосредственных сравнений соответствующего объекта класса , а таких сравнений, которые реализуются посредством «промежуточного» объекта. Скажем, если  сравним с , а  сравним с , то можно сказать, что между  и  имеет место сравнение «2-го порядка». Сила 2-го порядка учитывает число сравнений «2-го порядка». Только здесь надо иметь ввиду следующее обстоятельство: между одним объектом и другим может иметь место сравнение «2-го порядка» не единожды, а многократно. Например, пусть

 сравним с , а  с ;

 сравним с , а  с ;

 сравним с , а  с .

Тогда можно считать, что между  и  имеет место трёхкратное сравнение «2-го порядка». Вообще кратность сравнения «2-го порядка»  -го объекта над  -тым есть .

Под силой 2-го порядка объекта  понимается число его сравнений «2-го порядка» с учётом кратностей этих сравнений.

Точно так же вводится понятие силы 3-го порядка и вообще силы -го порядка объекта  ().

Обратим внимание на то обстоятельство, что для вычисления силы 2-го порядка число , выражающее кратность сравнения «2-го порядка»  с , есть элемент, стоящий в -ой строке и -ом столбце матрицы (здесь произведение матриц понимается как в линейной алгебре). Следовательно, сила 2-го порядка объекта  есть сумма элементов, стоящих в  -ой строке матрицы .

Аналогично сила -го порядка объекта  есть сумма элементов, стоящих в -ой строке матрицы ,  .

Обозначая через  элемент, стоящий в -ой строке матрицы  (ещё раз подчеркнём, что здесь произведение матрицы понимается как в линейной алгебре), а силу -го порядка объекта  через  , получаем

.

Относительной силой -го порядка объекта  будем называть величину

 .

Имеет место следующий важный факт: при неограниченном стремлении  число  стремится к определённом пределу:  .

Число  называется относительной силой объекта , .

Принцип «тонкого» ранжирования состоит в том, что «тонкое» ранжирование объектов осуществляется по их относительной силе. Полагаем, что объект  доминирует объект  тогда и только тогда, когда  и объекты  и  равноценны тогда и только тогда, когда .

Отметим, что ранжирование по относительной силе учитывает не только число непосредственных сравнений объектов друг с другом, но и «качество» этих сравнений.

Определение 12.

Вектор  , в котором -ая компонента есть относительная сила -го объекта, назовём предельным вектором.

Таким образом, можно сказать, что «тонкое» ранжирование проводится по компонентам предельного вектора.

Возникает естественный вопрос о нахождении предельного вектора. Оказывается, что предельный вектор является собственным вектором матрицы . Остановимся на этом подробно. Пусть  – произвольная действительная (элементам матрицы являются действительные числа) матрица порядка  ,  – собственное значение (число) матрицы , ненулевой вектор  – собственный вектор матрицы , т.е. . Собственное значение матрицы  является корнем характеристического уравнения , где  – единичная матрица  -го порядка. В общем случае характеристическое уравнение может не иметь действительных корней, однако, если матрица  неотрицательна (элементами матрицы являются неотрицательные числа), то обязательно имеется действительный, причём неотрицательный корень. Для неотрицательной матрицы  наибольшее среди неотрицательных собственных значений называется её числом Перрона-Фробениуса. Будем обозначать это число через . Существует собственный вектор, соответствующий собственному значению , все компоненты которого неотрицательны.

Матрица  называется разложимой, если в множестве  существует такое нетривиальное подмножество , что для всех  и  выполняется . При этом, если  содержит  элементов (), то перестановкой строк и столбцов разложимую матрицу можно привести к виду матрицы, изображённой на рис 6, где в левом нижнем углу стоит нулевая подматрица размерности .



















Рисунок 6











Рисунок 7

Матрица, которая не является разложимой, называется неразложимой.

Для неотрицательной неразложимой матрицы  её число Перрона-Фробениуса обладает следующими дополнительными свойствами:

1.  и все компоненты каждого собственного вектора, соответствующего  положительны с точностью до скалярного сомножителя;
2. если  – -ая строчная сумма,  – -ая столбцовая сумма матрицы , то

,;

1. собственный вектор, соответствующий собственному значению , единственный с точностью до скалярного сомножителя.

Если матрица доминирований-безразличий неразложима, то собственный нормированный вектор, соответствующий ей числу Перрона-Фробениуса, совпадает с ей предельным вектором с точностью до скалярного сомножителя.

Теорема 7. Матрица доминирований-безразличий, представляющая собой ограничение линейного отношения предпочтения на любом классе его отношения взаимной достижимости, неразложима.

Пусть  – линейное отношение на множестве  и  () – матрица доминирований-безразличий для объектов, составляющих класс отношения взаимной достижимости  . Предположим, что эта матрица разложима. Тогда она может быть приведена к виду матрицы, изображённой на рис. 7. Возьмём , . Так как объекты  и  находятся в одном классе эквивалентности , то существует цепочка , в которой каждый объект состоит с последующим за ним в отношении . В частности, , т.е. , поэтому (см. рис. 7) . Точно так же, учитывая, что , получаем , поэтому  и т.д. По индукции получаем , что ведёт к противоречию. Таким образом, матрица , , неразложима.

Отметим, что нормированный собственный вектор, соответствующий числу Перрона-Фробениуса неотрицательной неразложимой матрицы, не меняется при следующих преобразованиях матрицы: умножении матрицы на число ; прибавлении к ней матрицы вида , где  – произвольное действительное число. Отсюда следует, что при нахождении предельного вектора матрицы доминирований-безразличий можно все элементы этой матрицы умножить на произвольное положительное число, а в качестве элементов, стоящих на главной диагонали взять любые равные числа (проще всего положить их равными нулю).

Из изложенного выше получаем, что если  – матрица доминирований-безразличий, то её предельный вектор  можно найти как решение системы линейных уравнений , где  – наибольший неотрицательный действительный корень характеристического уравнения.

Итак, рассмотренный метод построения ранжирования, согласованного с предпочтением, содержит следующие три этапа

1-ый этап: построение «грубого» ранжирования с помощью выделения контуров графа отношения предпочтения и их линейного упорядочения факторизацией отношения предпочтения;

2-ой этап: построение «тонкого» ранжирования для каждого класса элементов, отождествлённых при «грубом» ранжировании; оно осуществляется по компонентам предельного вектора матрицы доминирований-безразличий;

3-ий этап: совмещение «грубого» и «тонкого» ранжирований.

Пример 8.

Пусть линейное отношение предпочтения  задано на множестве  матрицей доминирований-безразличий .



Рассмотрим задачу «грубого» ранжирования.

Булева матрица , соответствующая матрице доминирований-безразличий  имеет вид:



Находя булевы матрицы  и  (с использованием булева произведения матриц), получаем:



Из вида матрицы  следует, что отношение  нетранзитивно ( не содержится в ), а из совпадения матриц  и , согласно алгоритму выделения контуров графа, вытекает, что имеется два класса эквивалентности для отношения ): , . В качестве линейного упорядочения этих классов берём факторизацию отношения  по эквивалентности  и получаем следующую диаграмму:





Решим теперь задачу «тонкого» ранжирования внутри каждого класса.

Для класса  матрица доминирований-безразличий  имеет вид:



Для нахождения предельного вектора матрицы  умножим все её элементы на 2, а элементы, стоящие на главной диагонали, положим равными нулю. Получим матрицу:



Характеристическое уравнение этой матрицы имеет вид: Число Перрона-Фробениуса, а компоненты предельного вектора (при любой нормировке) совпадают. Таким образом, и при «тонком» ранжировании все объекты класса  равноценны.

Выпишем матрицу доминирований-безразличий  класса :



Умножим все элементы данной матрицы на 2, а элементы, стоящие на главной диагонали, положим равными нулю. Получим матрицу .



Характеристическое уравнение матрицы  имеет вид

 (12.1)

Пусть  – искомый предельный вектор.

Тогда



Уравнение (12.1) имеет единственный положительный корень. Выберем нормировку в виде  и получим,. Найдём интервал изменения , содержащий, на котором диапазоны изменения функций , ,  не пересекаются. Учитывая, что , а функции ,  – монотонны, свойство 2 числа Перрона-Фробениуса неотрицательной неразложимой матрицы методом дихотомии найдём, что при  будет, , . Таким образом, для компонент искомого предельного вектора  имеем, а решение задачи «тонкого» ранжирования для класса  имеет вид:







Окончательное решение задачи ранжирования в рассматриваемом примере даётся следующей диаграммой:









Заметим, что, если в результате решения задачи «грубого» ранжирования образовался класс отношения взаимной достижимости, на элементах которого сужение исходного линейного отношения класса может быть осуществлено путём построения диаграммы получившегося линейно квазиупорядоченного множества (см. пример 6)

Литература

1. Фон Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970. 707 с.
2. Розен В.В. Цель-оптимальность-решение . М.: Радио и связь, 1982. 169 с.
3. Зыков А.А. Основы теории графов. М.: Вузовская книга. 2004. С. 664
4. .Коротченко А.Г., Чернышова Н.Н. Динамический способ формирования классов при решении задачи «грубого» ранжирования// Инженерный вестник Дона. 2015. №1 (Часть2). URL:http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/ n1y2015/2843

Анатолий Григорьевич **Коротченко**

Наталья Николаевна **Чернышова**

Валентина Михайловна **Сморякова**

**ПРИНЦИПЫ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ**

***Учебно – методическое пособие***

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».

603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.