МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Е.В. Пройдакова

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией
Института информационных технологий математики и механики
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
02.04.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии»
09.03.04 «Программная инженерия»

Нижний Новгород

2017

УДК 519.21
ББК 22.171
П80

П80 Пройдакова Е.В. ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017. – 30 с.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент **Н.В. Кротов**

В учебно-методическом пособии, на примере двух систем управления конфликтными потоками требований: циклической и приоритетной, демонстрируется применение кибернетического подхода при построении математической модели данных неклассических системах массового обслуживания.

Учебно-методическое пособие будет полезно при изучении дисциплины «Системы массового обслуживания» студентам второго, третьего и четвертого курсов, а также магистрантам первого года ИИТММ, обучающимся по направлениям подготовки «Фундаментальная информатика и информационные технологии» и «Программная инженерия».

Ответственный за выпуск:
заместитель председателя методической комиссии
ИИТММ ННГУ,
к.т.н., доцент **В.М. Сморкалова**

УДК 519.21
ББК 22.171

Содержание

Введение……………………………………………………..…………………4

1. Описание кибернетического подхода……………………………..….5

2. Применение кибернетического подхода для построения математической модели выходных потоков в системе циклического управления конфликтными потоками………………………......………6

3. Кодирование информации блоков схемы циклической управляющей системы……….………………………………………...9

4. Марковское свойство векторной последовательности $\{(\Gamma_i, æ_{j,i}, \overline{\xi}_{j,i-1}); i \geq 0\}$ 12

5. Применение кибернетического подхода для построения математической модели выходных потоков в системе с приоритетным направлением……….……………………………………17

6. Кодирование информации блоков схемы приоритетной управляющей системы…………..……..……………………………..…..19

7. Марковское свойство пятимерной векторной последовательности $\{(\Gamma_i, æ_{1,i}, æ_{m,i}, \overline{\xi}_{1,i-1}, \overline{\xi}_{m,i-1}); i \geq 0\}$……….............22

8. Контрольные задания…………………………………………...…….28

Литература………………………………………………………………….29

Введение

В современной теории массового обслуживания одним из наиболее актуальных и перспективных направлений является изучение свойств выходных потоков. Это в первую очередь связано с широким применением задач и методов теории массового обслуживания в организации производства и при создании сложных информационных систем (систем по обработке и передаче информации). Как правило, такие системы имеют разветвленную структуру и состоят из двух и более подсистем, объединенных некоторым образом. Если в такой структуре имеется последовательное соединение, то выходной поток одной подсистемы является входным для другой, и в этом случае закономерно возникает вопрос описания выходного потока подсистемы, а точнее, проблема исследования его вероятностных распределений.

Первые результаты в области выходных потоков были получены в 60-е годы XX века П.Дж. Берком, Дж.В. Коэном, Е. Рейчем и П.Д. Финчем. Данные результаты касались только простейших систем, то есть одноканальных систем обслуживания с неограниченной очередью, пуассоновским входным потоком и показательным законом обслуживания требований.

В нашей стране выходными потоками в разное время занимались многие известные математики. В своих работах Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко, Г.Ш. Цициашвили, И.И. Ежов, Н.В. Маркова, В.Ф. Каданков рассматривали одноканальные системы с некоторыми усложнениями, касающимися вида входного потока, дисциплины формирования очереди и механизма обслуживания. Выходной поток, как правило, задавался аналогично входному, для этого использовался одного из следующих эквивалентных способов [1]:

1) определялся случайный процесс $\{\bar{\xi}(t);\ t \geq 0\}$, где случайная величина $\bar{\xi}(t)$ при $t > 0$ характеризовала число заявок, обслуженных системой за промежуток времени $[0, t)$ и $\bar{\xi}(t) = \bar{\xi}(t-0)$, $\bar{\xi}(0) = 0$;

2) указывалась случайная последовательность $\{(\tau_i', \bar{\xi}_i');\ i \geq 1\}$, в которой через τ_i' и $\bar{\xi}_i'$ обозначались соответственно i-й момент появления требований на выходе и число требований обслуженных системой в этот момент времени.

Если для описания выходного потока использовать один из предложенных способов, то в общем случае не удается найти конечномерные распределения процесса. Почти очевидно, что выходной поток существенно зависит от системы массового обслуживания, в которой он формируется. Следовательно, в описание выходного потока необходимо включать некоторые элементы самой системы массового обслуживания. Более того, целесообразно следить не за отдельным требованием, а за некоторой случайной группой заявок. Впервые такой подход был предложен М.А. Федоткиным и назван **нелокальным описанием потоков требований** [2-3]. При этом в описание выходных потоков включены такие элементы самой системы массового обслуживания как состояния обслуживающего устройства и величины очередей по потокам.

Для построения моделей выходных потоков управляющих систем обслуживания и получения нелокального описания выходных потоков будем использовать так называемый **«кибернетический подход»**, методологически разработанный А.А. Ляпуновым и С.В. Яблонским [4].

1. Описание кибернетического подхода

Классические методы построения и изучения математических моделей реальных систем обслуживания в основном исчерпываются двумя подходами. Первый из них основан на классических работах А.К. Эрланга, А.Я. Хинчина, А.Н. Колмогорова, К. Пальма, Ф. Поллачека, Д.Дж. Кендалла, Б.В. Гнеденко и др. Данный подход в значительной степени является описательным и всегда предполагает формальное задание таких составляющих элементов системы, как входной поток, обслуживающее устройство, дисциплина формирования очереди и структура системы, причем описание дисциплины очереди и структуры системы дается исключительно на содержательном уровне. Второй подход связан с исследованием А.А. Боровкова по созданию общих асимптотических методов анализа в теории массового обслуживания, в том числе доказательства предельных теорем [5].

Упомянутые подходы обладают рядом недостатков, являющимися следствием их единой точки зрения на изучение систем управления с позиции «черного ящика». В частности, достигаемая при их применении математическая общность результатов не дает возможности получения конечномерных распределений для соответствующего случайного процесса, описывающего поведение реальных систем.

В данной работе будет использоваться **кибернетический** подход к построению и анализу математических моделей статистически устойчивых экспериментов с управлением. При таком подходе считается, что управляемый случайный процесс в классическом смысле является всего лишь удобной вероятностной моделью совместного функционирования во времени объекта управления и системы управления, а не моделью эксперимента. В силу этого на систему целесообразно смотреть не с позиции «черного ящика», а с точки зрения общего понятия управляющей системы.

В основе кибернетического подхода при построении, анализе и оптимизации модели управляющей системы лежат следующие фундаментальные положения:

1) принцип дискретности актов функционирования системы во времени τ_i, $i \geq 0$, где точечный случайный процесс $\{\tau_i;\ i \geq 0\}$ задает на $[0,\infty)$ шкалу тактов времени работы управляющей системы;

2) принцип нелокальности в описании строения управляющей системы;

3) принцип совместного рассмотрения блочного строения управляемой системы обслуживания и ее функционирования во времени.

Эти принципы позволили выделить **схему, информацию, координаты и функцию** управляющей системы обслуживания.

Для **схемы** определяют следующие её составляющие блоки: *внешняя среда, входные и выходные полюсы, внешняя память, внутренняя память, устройство по переработке информации внешней и внутренней памяти*. Некоторые из перечисленных блоков конкретная схема может не включать. Схема управляющей системы обслуживания отражает её скелетное строение и даёт возможность графического изображения системы с помощью фиксированного числа составляющих блоков схемы и заданных связей между блоками.

Информация представляет собой состояния ячеек памяти в данный момент времени.

Координаты описывают расположение блоков в схеме управляющей системы.

Функция определяет поведение управляющей системы, она указывает действие, которое система может совершить, переходя к следующему дискретному моменту времени. Также вводится понятие алгоритма управления состояниями составляющих блоков схемы.

При применении кибернетического подхода необходимо кодировать информацию или, что то же самое, осуществить нелокальное описание составляющих блоков схемы.

Далее рассмотрим подробнее применение кибернетического подхода при построении математической модели реальной системы обслуживания.

2. Применение кибернетического подхода для построения математической модели выходных потоков в системе циклического управления конфликтными потоками

Рассмотрим систему управления m независимыми и конфликтными транспортными потоками на пересечении магистралей в классе циклических алгоритмов. Конфликтность потоков означает, что их нельзя суммировать и это не позволяет свести задачу к более простому случаю с одним потоком. Обслуживание машин (требований) из конфликтных потоков происходит в непересекающиеся промежутки времени. Эти промежутки называются основными этапами обслуживания заявок. Под обслуживанием машин понимается их переезд через перекресток. Кроме того, есть еще дополнительные промежутки времени – переналадки, за счет которых разрешается проблема конфликтности потоков. Во время переналадок продолжает обслуживаться тот же поток, что и на основном этапе, но уже с большей интенсивностью.

Так как у каждого из m потоков есть основной этап обслуживания и этап переналадки, то обслуживающее устройство должно ровно иметь $2m$ состояний $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, ..., \Gamma^{(2m)}$, причем:

$\Gamma^{(2j-1)}$ — состояние обслуживающего устройства, при котором пропускается поток Π_j с интенсивностью μ_j и не пропускаются остальные (можно интерпретировать это состояние как зеленый свет для потока Π_j и красный для остальных потоков);

$\Gamma^{(2j)}$ — состояние обслуживающего устройства, при котором пропускается поток Π_j с интенсивностью $\mu'_j \geq \mu_j$ и не пропускаются остальные (можно интерпретировать это состояние как желтый свет для потока Π_j). Здесь μ_j (μ'_j) определяет число машин, пропускаемых в единицу времени в состоянии автомата-светофора $\Gamma^{(2j-1)}$ ($\Gamma^{(2j)}$) соответственно.

Длительности состояний $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, ..., \Gamma^{(2m)}$ известны и равны соответственно $T_1, T_2, \ldots, T_{2m}$ единиц времени. Работа обслуживающего устройства осуществляется **по циклическому алгоритму**. Такой алгоритм управления конфликтными потоками используется потому, что он прост в реализации. Более того, за счёт выбора вектора $b = (T_1, T_2, \ldots, T_{2m})$ циклический алгоритм **часто оказывается квазиоптимальным по условию минимума задержек при сильной загрузке системы**.

Вектор b есть **управление** m независимыми конфликтными потоками в нашей системе, где $b \in \mathcal{R} = \{(T_1, T_2, \ldots, T_{2m})\colon T_1 > 0, T_2 > 0, \ldots, T_{2m} > 0\}$.

Входные потоки $\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_m$ считаем **пуассоновскими** соответственно с интенсивностями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Заметим, что для каждого $j = \overline{1, m}$ интенсивность λ_j определяет среднее число машин, поступивших к стоп – линии перекрестка за единицу времени.

Заявки, пришедшие в систему, могут или сразу поступать на обслуживание, или образовывать **неограниченные очереди** $O_1, O_2, \ldots, O_m$. Из соответствующей очереди заявки выбираются на обслуживание группами по принципу: первая пришла – первая ушла. Таким образом, вновь пришедшие машины поступают в конец очереди, а выбор на обслуживание осуществляется из ее начала.

Рассмотрим теперь две величины. Первая величина определяет максимальное число требований, которое может обслужить система при эффективной работе и максимальной загруженности. В этом случае на выходе система генерирует так называемые **виртуальные потоки насыщения** $\Pi'_1, \Pi'_2, \ldots, \Pi'_m$. **Потоки насыщения** $\Pi'_1, \Pi'_2, \ldots, \Pi'_m$ будем считать независимыми. Вторая величина равна сумме числа машин, находящихся в очереди к моменту включения сигнала, разрешающего переезд, и числа машин, подъехавших за время его работы. Тогда число машин, которое в действительности может проехать через перекресток, определяется как минимум из этих двух величин. Такие **стратегии обслуживания** $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_m$ называются экстремальными.

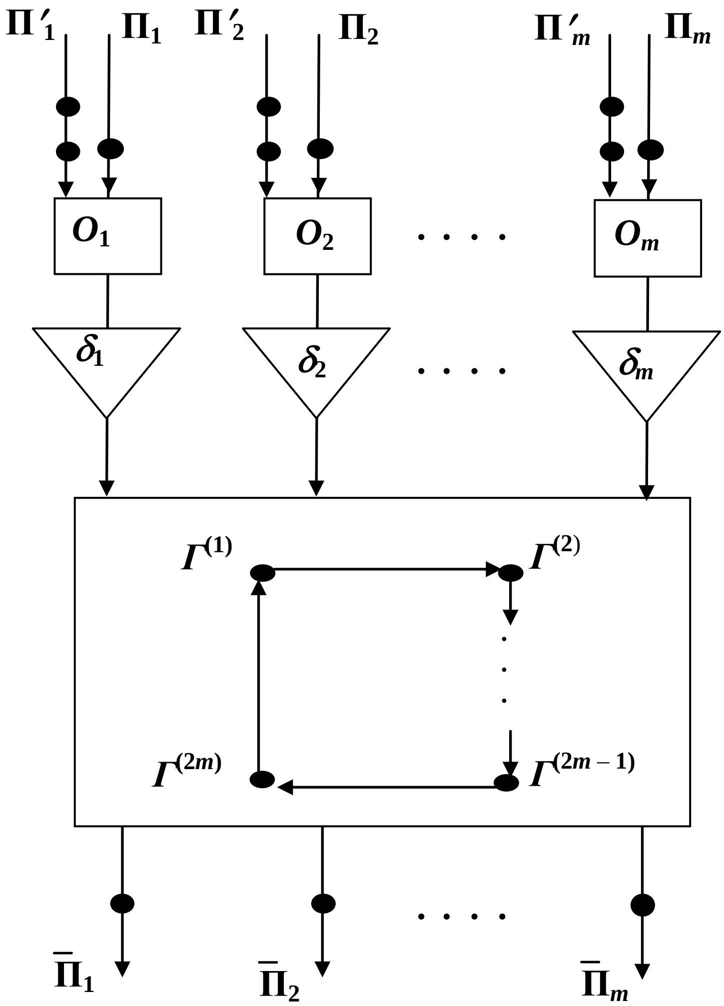

Рис. 1. Функциональная схема циклической системы массового обслуживания

На рис. 1 представлены следующие составляющие блоки **схемы**:

a) входные потоки $\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_m$ первичных требований — первый тип входных полюсов для управляющей системы обслуживания;

b) потоки насыщения $\Pi'_1, \Pi'_2, \ldots, \Pi'_m$ (выходные потоки системы при ее максимальной загрузке и эффективном функционировании) — второй тип входных полюсов;

c) накопители $O_1, O_2, \ldots, O_m$ очередей по входным потокам — внешняя память;

d) устройства $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_m$ по организации дисциплины очередей в накопителях или стратегии обслуживания — блок по переработке информации внешней памяти;

e) обслуживающее устройство с $2m$ состояниями $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, ..., \Gamma^{(2m)}$ — внутренняя память;

f) алгоритм смены состояний $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, ..., \Gamma^{(2m)}$ обслуживающего устройства — блок по переработке информации внутренней памяти;

g) выходные потоки $\overline{\Pi}_1, \overline{\Pi}_2, \ldots, \overline{\Pi}_m$ обслуженных требований — выходные полюса.

Набор состояний очередей в накопителях, состояний обслуживающего устройства, входных потоков, потоков насыщения и потоков обслуженных требований полностью определяют **информацию** управляющей системы обслуживания. Номера входных потоков, потоков насыщения, выходных потоков, накопителей, механизмов формирования очередей и номера состояний обслуживающего устройства задают **координаты** управляющей системы обслуживания. **Функция** системы — это управление потоками (разрешение или запрещение начала обслуживания каждого из них) и непосредственно обслуживание неоднородных требований.

3. Кодирование информации блоков схемы циклической управляющей системы

Все рассматриваемые ниже случайные объекты будем задавать на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \Im, \mathrm{P}(\cdot))$, где Ω — множество описаний всех элементарных исходов системы, $\Im$ — σ- алгебра событий $A \subset \Omega$, а $\mathrm{P}(A)$ — вероятность исхода $A \in \Im$.

В данном случае, когда дополнительно не определяются времена обслуживания отдельных заявок, функционирование системы в непрерывном времени является сложным процессом, и в общем случае не является при этом марковским процессом. Поэтому изучение таких характеристик системы как длины очередей, время ожидания обслуживания заявки по потокам и выходные потоки в непрерывном времени является трудноразрешимой задачей. Для решения данной проблемы, как правило, используется **метод вложенных цепей Маркова**. Суть метода состоит в том, что процесс обслуживания в непрерывном времени будем рассматривать в специально подобранные дискретные моменты. Эти моменты времени выбираются таким образом, чтобы новый процесс обладал свойством марковости. Однако проблема определения указанных моментов является очень сложной, поскольку не существует определенной методики или алгоритма их выбора. Мы проблему выбора специальных моментов времени будем решать уже на этапе построения математической модели, а точнее, - на этапе кодирования информации составляющих блоков схемы и построения модели системы.

Условимся, что величины τ_i, $i \geq 0$ являются моментами переключения состояний обслуживающего устройства (светофора) из одной фазы в другую. Положим, что τ_0 – момент начала функционирования системы. Пусть он совпадает с некоторым моментом переключения фазы светофора. Изучать характеристики системы будем в дискретные моменты времени τ_i, $i = 0, 1, \ldots$ переключений фаз светофора или на каждом из промежутков $[\tau_i, \tau_{i+1})$. Таким образом, дискретная шкала функционирования системы задается случайной последовательностью $\{\tau_i;\ i = 0, 1, \ldots\}$. Элементы данной последовательности случайны, поскольку значения $T_1, T_2, \ldots, T_{2m}$ различны и можно задавать вероятности состояний светофора в начальный момент времени τ_0.

Введем на $(\Omega, \Im, \mathrm{P}(\cdot))$ при $j=\overline{1,m}$, $i = 0, 1,\ldots$ следующие случайные величины и элементы:

1) $\eta_{j,\,i}$ — число заявок потока Π_j, пришедших за интервал времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$, каждая дискретная случайная величина $\eta_{j,\,i}$ принимает свои значения из множества $\mathrm{X} = \{0, 1, \ldots\}$;
2) $\xi_{j,\,i}$ — максимально возможное число заявок, которое может быть обслужено за время $[\tau_i, \tau_{i+1})$ из очереди потока Π_j; любая дискретная случайная величина $\xi_{j,\,i}$ принимает значения из множества $\{0, l'_j, l_j\}$, где l_j – максимально возможное число машин потока Π_j, которое может проехать за время работы сигнала $\Gamma^{(2j-1)}$ и $l_j = [\mu_j T_{2j-1}]$, а l'_j — это максимально возможное число машин потока Π_j, которое может обслужиться за время работы сигнала $\Gamma^{(2j)}$ и $l'_j = [\mu'_j T_{2j}]$; причем $l_j \ge l'_j$, так как $T_{2j-1} >> T_{2j}$;
3) Γ_i — состояние светофора на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$, каждый из случайных элементов Γ_i принимает значения из набора $\Gamma = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, ..., \Gamma^{(2m)}\}$;
4) $æ_{j,\,i}$ — длина очереди по потоку Π_j в момент времени τ_i, $æ_{j,i}$ является дискретной случайной величиной со значениями из множества X;
5) $\overline{\xi}_{j,\,i}$ — число реально обслуженных заявок потока Π_j за $[\tau_i, \tau_{i+1})$, случайная величина $\overline{\xi}_{j,\,i}$ принимает значения из множества $\mathrm{Y}_j = \{0, 1, ..., l_j\}$;
6) $\overline{\xi}_{j,\,-1}$ — число реально обслуженных заявок потока Π_j за время $[0, \tau_0)$, случайная величина $\overline{\xi}_{j,\,-1}$ принимает значения из множества Y_j.

Входные потоки и потоки насыщения также будем задавать не локально. Вместо случайного процесса $\Pi_j = \{\eta_j(t);\, t \ge 0\}$, $j=\overline{1,m}$ с непрерывным временем t будем рассматривать последовательности $\Pi_j^* = \{\eta_{j,\,i};\, i \ge 0\}$ $j=\overline{1,m}$ из неотрицательных целочисленных случайных величин. Потоки считаем пуассоновскими, поэтому для $\eta_{j,\,i}$ при $u \in \mathrm{X}$, $j=\overline{1,m}$, $r=\overline{1,2m}$ можно записать следующие условные вероятности:

$$\mathrm{P}(\eta_{j,\,i} = u \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r)}) = (\lambda_j T_r)^u (u!)^{-1} \exp\{-\lambda_j T_r\} = \varphi_j(u, T_r). \qquad (1)$$

Поток насыщения по j-му направлению будем задавать в виде случайной последовательности $\Pi'_j = \{\xi_{j,\,i};\, i \ge 0\}$, $j=\overline{1,m}$. Введем в рассмотрение функции:

$$f_j(\Gamma^{(r)}) = \begin{cases} l_j & \text{при} \quad r = 2j-1; \\ l'_j & \text{при} \quad r = 2j; \\ 0 & \text{при} \quad r \in \{1, 2, \ldots 2m\} \setminus \{2j-1, 2j\}, \end{cases} \text{ где } j=\overline{1,m},\ \Gamma^{(r)} \in \Gamma.$$

Случайные величины $\xi_{j,\,i}$ при $i = 0, 1, \ldots$ и $j=\overline{1,m}$ определяются с помощью функций $f_j(\Gamma^{(r)})$ следующим образом: $\xi_{j,\,i} = f_j(\Gamma_i)$.

Для $\xi_{j,\,i}$ можно записать общее вырожденное условное распределение вида:

$$\mathrm{P}(\xi_{j,\,i} = v \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r)}) = \beta_j(v, \Gamma^{(r)}),\;\; j = \overline{1,m}, \tag{2}$$

$$\text{где}\;\; \beta_j(v, \Gamma^{(r)}) = \begin{cases} 1 \;\; \text{при} \;\; v = l_j, \;\; r = 2j - 1; \\ 1 \;\; \text{при} \;\; v = l'_j, \;\; r = 2j; \\ 1 \;\; \text{при} \;\; v = 0, \;\; r \in \{1, 2, \ldots 2m\} \backslash \{2j - 1, 2j\}; \\ 0 \;\; \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{3}$$

Так как обслуживающее устройство или светофор имеет циклический алгоритм работы, то его следующее состояние Γ_{i+1} зависит только от предыдущего состояния Γ_i. Введем в рассмотрение функцию $U(\Gamma^{(r)})$, которая принимает значение $\Gamma^{(1)}$ при $r = 2m$ и принимает значение $\Gamma^{(r+1)}$ в остальных случаях, т.е. при $r \in \{1, 2\ldots, 2m - 1\}$. Тогда зависимость Γ_{i+1} от Γ_i определяется рекуррентным соотношением (4).

$$\Gamma_{i+1} = U(\Gamma_i),\;\; i = 0, 1, \ldots. \tag{4}$$

Стратегия механизма обслуживания формализует работу элементов схемы $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$ и представляет собой функциональную зависимость, которая по очереди, потоку насыщения и потоку заявок указывает, сколько требований на самом деле обслужилось. Заявки обслуживаются в соответствии с так называемой экстремальной стратегией обслуживания. Это значит, что справедливо:

$$\bar{\xi}_{j,\,i} = \min\{æ_{j,\,i} + \eta_{j,\,i}, \xi_{j,\,i}\},\;\; i = 0, 1, \ldots,\;\; j = \overline{1,m}.$$

Осталось получить рекуррентное соотношение для очереди. Очередь в момент времени τ_{i+1} будет складываться из очереди в момент времени τ_i, плюс заявки, пришедшие за интервал времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$, и минус те, которые обслужились на этом интервале. Таким образом, при $i = 0, 1, \ldots,\; j = \overline{1,m}$.для очереди можно записать следующее равенство:

$$æ_{j,\,i+1} = æ_{j,\,i} + \eta_{j,\,i} - \bar{\xi}_{j,\,i} = æ_{j,\,i} + \eta_{j,\,i} - \min\{æ_{j,\,i} + \eta_{j,\,i}, \xi_{j,\,i}\} =$$
$$= \max\{0, æ_{j,\,i} + \eta_{j,\,i} - \xi_{j,\,i}\}.$$

Итак, при $i = 0, 1, \ldots$ доказано рекуррентное соотношение:

$$(\Gamma_{i+1}, æ_{j,\,i+1}, \bar{\xi}_{j,\,i}) = (U(\Gamma_i), \max\{0, æ_{j,\,i} + \eta_{j,\,i} - \xi_{j,\,i}\}, \min\{æ_{j,\,i} + \eta_{j,\,i}, \xi_{j,\,i}\}). \tag{5}$$

Из соотношений (5) видно, что для всех $j = \overline{1,m}$ случайные величины $æ_{j,\,i+1}$ и $\bar{\xi}_{j,\,i}$ определяются как неслучайные функции от случайных аргументов $æ_{j,\,i}$, $\eta_{j,\,i}$, $\xi_{j,\,i}$, а Γ_{i+1} как неслучайная функция от случайного элемента Γ_i (состояния обслуживающего устройства или светофора в i-й момент времени).

Случайные величины $\eta_{j,\,i}$ и $\xi_{j,\,i}$, $j = \overline{1,m}$ являются независимыми при условии, что состояние светофора известно.

В силу независимости входных потоков, потоков насыщения и циклического переключения состояний светофора можно рассматривать процесс обслуживания машин отдельно для каждого из потоков Π_j. Состояние всей системы по потоку Π_j на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$ будем характеризовать случайным вектором $(\Gamma_i, æ_{j,i}, \overline{\xi}_{j,i-1})$.

Поведение системы по потоку Π_j описывается векторной последовательностью $\boldsymbol{\{(\Gamma_i, æ_{j,i}, \overline{\xi}_{j,i-1});\ i \geq 0\}}$ которая определяет динамику состояний обслуживающего устройства, флуктуацию длин очередей по потокам и флуктуацию обслуженных требований. Более того, **данная последовательность задает нелокальное описание выходного потока по *j*-му направлению**, причем за выходной поток отвечает $\overline{\xi}_{j,i-1}$, а компоненты Γ_i и $æ_{j,i}$ играют роль меток. Здесь и далее все рассуждения проводятся для j-го потока.

Совершенно аналогично можно получить результаты и для последовательности $\{(\Gamma_i, æ_{1,i}, æ_{2,i},\ldots æ_{m,i}, \overline{\xi}_{1,i-1}, \overline{\xi}_{2,i-1},\ldots, \overline{\xi}_{m,i-1});\ i \geq 0\}$. Считаем, что в начальный момент τ_0 задано распределение векторов $(\Gamma_0, æ_{j,0}, \overline{\xi}_{j,-1})$, то есть известны вероятности

$$P(\Gamma_0 = \Gamma^{(s)}, æ_{j,0} = x, \overline{\xi}_{j,-1} = y), \text{ где } \Gamma^{(s)} \in \Gamma,\ x \in X,\ y \in Y_j. \qquad (6)$$

Из равенств (1) и (3) следует, что условное распределения случайных величин $\eta_{j,i}$, $\overline{\xi}_{j,i-1}$ существенно зависит от выбора вектора $b = (T_1, T_2, \ldots, T_{2m})$. Отсюда в силу соотношений (5) и (6) конечномерные распределения векторной случайной последовательности $\{(\Gamma_i, æ_{j,i}, \overline{\xi}_{j,i-1});\ i \geq 0\}$ также зависят от выбора вектора b.

4. Марковское свойство векторной последовательности $\boldsymbol{\{(\Gamma_i, æ_{j,i}, \overline{\xi}_{j,i-1});\ i \geq 0\}}$

Кибернетический подход изучения реальных процессов обслуживания с управлением требует на этапе построения математической модели так выбирать шкалу $\{\tau_i;\ i \geq 0\}$ тактов времени, чтобы можно было определить конечномерные распределения управляемой векторной случайной $\{(\Gamma_i, æ_{j,i}, \overline{\xi}_{j,i-1});\ i \geq 0\}$. Если дискретные моменты времени $\{\tau_i;\ i = 0, 1,\ldots\}$ были выбраны удачно, то последовательность $\{(\Gamma_i, æ_{j,i}, \overline{\xi}_{j,i-1});\ i \geq 0\}$ трехмерных векторов, как правило, обладает свойством марковости. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. При заданном распределении трехмерного начального вектора $(\Gamma_0, æ_{j,0}, \overline{\xi}_{j,-1})$ управляемая случайная векторная последовательность $\{(\Gamma_i, æ_{j,i}, \overline{\xi}_{j,i-1});\ i \geq 0\}$ является марковской.

Доказательство. Марковское свойство для случайной последовательности состоит в следующем ограничении:

$P(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r)}, æ_{j,\,i+1} = x,\ \bar{\xi}_{j,\,i} = y \mid \Gamma_k = \Gamma^{(r_k)}, æ_{j,\,k} = x_k,\ \bar{\xi}_{j,\,k-1} = y_k,\ k = \overline{0,i}\,) =$
$= P(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r)}, æ_{j,\,i+1} = x,\ \bar{\xi}_{j,\,i} = y \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, æ_{j,\,i} = x_i,\ \bar{\xi}_{j,\,i-1} = y_i),$ (7)
где $\Gamma^{(r)}, \Gamma^{(r_k)} \in \Gamma$; $x, x_k \in X$; $y, y_k \in Y_j$.

Докажем, что для последовательности $\{(\Gamma_i,\ æ_{j,\,i},\ \bar{\xi}_{j,\,i-1});\ i \geq 0\}$ это свойство справедливо. Рассмотрим отдельно левую часть выражения (7). Преобразуем ее, используя формулу полной вероятности, а также учитывая, что случайные величины $\eta_{j,\,i}$ и $\xi_{j,\,i}$ условно независимы при фиксированном значении случайных величин Γ_k, $æ_{j,\,k}$ и $\bar{\xi}_{j,\,k-1}$, где $k = \overline{0,i}$. Последовательно получаем:

$P(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r)}, æ_{j,\,i+1} = x,\ \bar{\xi}_{j,\,i} = y \mid \Gamma_k = \Gamma^{(r_k)}, æ_{j,\,k} = x_k,\ \bar{\xi}_{j,\,k-1} = y_k,\ k = \overline{0,i}\,) =$
$= \sum_{v,\,u=0}^{\infty} P(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r)}, æ_{j,\,i+1} = x,\ \bar{\xi}_{j,\,i} = y,\ \eta_{j,\,i} = u,\ \xi_{j,\,i} = v \mid \Gamma_k = \Gamma^{(r_k)}, æ_{j,\,k} = x_k,\ \bar{\xi}_{j,\,k-1} =$
$= y_k,\ k = \overline{0,i}\,) = \sum_{v=0}^{\infty}\sum_{u=0}^{\infty} P(\eta_{j,\,i} = u, \xi_{j,\,i} = v \mid \Gamma_k = \Gamma^{(r_k)}, æ_{j,\,k} = x_k,\ \bar{\xi}_{j,\,k-1} = y_k,\ k = \overline{0,i}\,)\times$
$\times P(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r)}, æ_{j,\,i+1} = x,\ \bar{\xi}_{j,\,i} = y \mid \Gamma_k = \Gamma^{(r_k)}, æ_{j,\,k} = x_k,\ \bar{\xi}_{j,\,k-1} = y_k,\ k = \overline{0,i}\,,\ \eta_{j,\,i} = u,$
$\xi_{j,\,i} = v) = \sum_{v=0}^{\infty}\sum_{u=0}^{\infty} P(\eta_{j,i} = u \mid \Gamma_k = \Gamma^{(r_k)}, æ_{j,\,k} = x_k,\ \bar{\xi}_{j,\,k-1} = y_k,\ k = \overline{0,i}\,) \times$
$\times P(\xi_{j,\,i} = v \mid \Gamma_k = \Gamma^{(r_k)}, æ_{j,\,k} = x_k,\ \bar{\xi}_{j,\,k-1} = y_k,\ k = \overline{0,i}\,)\ P(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r)}, æ_{j,\,i+1} = x,\ \bar{\xi}_{j,\,i} =$
$= y \mid \Gamma_k = \Gamma^{(r_k)}, æ_{j,\,k} = x_k,\ \bar{\xi}_{j,\,k-1} = y_k,\ k = \overline{0,i}\,,\ \eta_{j,\,i} = u,\ \xi_{j,\,i} = v).$

Воспользуемся тем, что случайные величины $\eta_{j,\,i}$, $æ_{j,\,k}$, $\bar{\xi}_{j,\,k-1}$, $k = \overline{0,i}$ и Γ_k, $k = \overline{0,i-1}$ условно независимы при фиксированном значении Γ_i, и что $\xi_{j,\,i}$, $æ_{j,\,k}$, $\bar{\xi}_{j,\,k-1}$, $k = \overline{0,i}$ и Γ_k, $k = \overline{0,i-1}$ также являются условно независимыми при фиксированном значении Γ_i. Затем используем соотношение (5).

$\sum_{v=0}^{\infty}\sum_{u=0}^{\infty} P(\eta_{j,i} = u \mid \Gamma_k = \Gamma^{(r_k)}, æ_{j,\,k} = x_k,\ \bar{\xi}_{j,\,k-1} = y_k,\ k = \overline{0,i}\,) \times$
$\times P(\xi_{j,\,i} = v \mid \Gamma_k = \Gamma^{(r_k)}, æ_{j,\,k} = x_k,\ \bar{\xi}_{j,\,k-1} = y_k,\ k = \overline{0,i}\,) \times$
$\times P(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r)}, æ_{j,\,i+1} = x,\ \bar{\xi}_{j,\,i} = y \mid \Gamma_k = \Gamma^{(r_k)}, æ_{j,\,k} = x_k,\ \bar{\xi}_{j,\,k-1} = y_k,\ k = \overline{0,i}\,,$
$\eta_{j,\,i} = u,\ \xi_{j,i} = v) = \sum_{v=0}^{\infty}\sum_{u=0}^{\infty} P(\eta_{j,i} = u \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)})\ P(\xi_{j,\,i} = v \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}) \times$
$\times P(U(\Gamma^{(r_i)}) = \Gamma^{(r)}, \max\{0, x_i + u - v\} = x, \min\{x_i + u, v\} = y).$
Если воспользоваться соотношениями (1) и (2), то можно получить следующее:

$\sum_{u=0}^{\infty}\ \sum_{v \in \{0, l'_j, l_j\}} P(\eta_{j,\,i} = u \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)})\ P(\xi_{j,\,i} = v \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}) \times$
$\times P(U(\Gamma^{(r_i)}) = \Gamma^{(r)}, \max\{0, x_i + u - v\} = x, \min\{x_i + u, v\} = y) =$

$$= \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v \in \{0, l'_j, l_j\}} \varphi_j(u, T_{r_i}) \beta_j(v,\ \Gamma^{(r_i)}) \mathrm{P}(U(\Gamma^{(r_i)}) = \Gamma^{(r)}, \max\{0, x_i + u - v\} = x,$$

$$\min\{x_i + u, v\} = y).$$

Теперь повторим эти же выкладки с незначительными изменениями для правой части выражения (7). При ее преобразовании также используем формулу полной вероятности и учитываем, что случайные величины $\eta_{j,\, i}$ и $\xi_{j,\, i}$ условно независимы при фиксированном значении Γ_i, $æ_{j,\, i}$ и $\bar{\xi}_{j,\, i-1}$.

$$\mathrm{P}(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r)}, æ_{j,\, i+1} = x,\ \bar{\xi}_{j,\, i} = y \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, æ_{j,\, i} = x_i,\ \bar{\xi}_{j,\, i-1} = y_i) =$$

$$= \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{u=0}^{\infty} \mathrm{P}(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r)}, æ_{j,i+1} = x, \bar{\xi}_{j,i} = y, \eta_{j,\, i} = u, \xi_{j,\, i} = v \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, æ_{j,\, i} = x_i,\ \bar{\xi}_{j,i-1} = y_i) =$$

$$= \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{u=0}^{\infty} \mathrm{P}(\eta_{j,i} = u, \xi_{j,i} = v \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, æ_{j,\, i} = x_i,\ \bar{\xi}_{j,\, i-1} = y_i) \times$$

$$\times \mathrm{P}(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r)}, æ_{j,\, i+1} = x,\ \bar{\xi}_{j,\, i} = y \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, æ_{j,\, i} = x,\ \bar{\xi}_{j,\, i-1} = y_i,\ \eta_{j,\, i} = u,\ \xi_{j,\, i} = v) =$$

$$= \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{u=0}^{\infty} \mathrm{P}(\eta_{j,i} = u \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, æ_{j,\, i} = x_i,\ \bar{\xi}_{j,\, i-1} = y_{i-1}) \times$$

$$\times \mathrm{P}(\xi_{j,\, i} = v \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r)}_i, æ_{j,\, i} = x_i,\ \bar{\xi}_{j,\, i-1} = y_i) \times$$

$$\times \mathrm{P}(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r)}, æ_{j,\, i+1} = x,\ \bar{\xi}_{j,\, i} = y \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, æ_{j,\, i} = x_i,\ \bar{\xi}_{j,\, i-1} = y_i,\ \eta_{j,\, i} = u,\ \xi_{j,\, i} = v).$$

Последовательно воспользуемся тем, что случайные величины $\eta_{j,\, i}$, $æ_{j,\, i}$, $\bar{\xi}_{j,\, i-1}$ условно независимы при фиксированном значении Γ_i, и что $\xi_{j,\, i}$, $æ_{j,\, i}$, $\bar{\xi}_{j,\, i-1}$ также являются условно независимыми при фиксированном значении Γ_i. Затем применим соотношение (5).

$$\sum_{v=0}^{\infty} \sum_{u=0}^{\infty} \mathrm{P}(\eta_{j,i} = u \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, æ_{j,\, i} = x_i,\ \bar{\xi}_{j,\, i-1} = y_{i-1}) \times$$

$$\times \mathrm{P}(\xi_{j,\, i} = v \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r)}_i, æ_{j,\, i} = x_i,\ \bar{\xi}_{j,\, i-1} = y_i) \times$$

$$\times \mathrm{P}(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r)}, æ_{j,\, i+1} = x,\ \bar{\xi}_{j,\, i} = y \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, æ_{j,\, i} = x_i,\ \bar{\xi}_{j,\, i-1} = y_i,\ \eta_{j,i} = u,\ \xi_{j,i} = v) =$$

$$= \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{u=0}^{\infty} \mathrm{P}(\eta_{j,i} = u \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}) \mathrm{P}(\xi_{j,i} = v \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}) \times$$

$$\times \mathrm{P}(U(\Gamma^{(r_i)}) = \Gamma^{(r)}, \max\{0,\ x_i + u - v\} = x, \min\{x_i + u,\ v\} = y).$$

Воспользовавшись соотношениями (1) и (2), получим следующее:

$$\sum_{v=0}^{\infty} \sum_{u=0}^{\infty} \mathrm{P}(\eta_{j,i} = u \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}) \mathrm{P}(\xi_{j,i} = v \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}) \times$$

$$\times \mathrm{P}(U(\Gamma^{(r_i)}) = \Gamma^{(r)}, \max\{0,\ x_i + u - v\} = x, \min\{x_i + u,\ v\} = y) =$$

$$= \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v \in \{0, l'_j, l_j\}} \varphi_j(u, T_{r_i}) \beta_j(v, \Gamma^{(r_i)}) \mathrm{P}(U(\Gamma^{(r_i)}) = \Gamma^{(r)}, \max\{0; x_i + u - v\} = x, \min\{x_i + u; v\} = y).$$

Таким образом, в итоге преобразования правой и левой частей выражения (7) были получены одинаковые результаты. Значит, справедливо равенство:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r)},\ æ_{j,i+1} = x,\ \bar{\xi}_{j,i} = y \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_k)},\ æ_{j,k} = x_k,\ \bar{\xi}_{j,k-1} = y_k,\ k = \overline{0,i}\,) = \\
&= \mathrm{P}(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r)},\ æ_{j,i+1} = x,\ \bar{\xi}_{j,i} = y \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)},\ æ_{j,i} = x_i,\ \bar{\xi}_{j,i-1} = y_i) = \qquad (8) \\
&= \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v \in \{0, l'_j, l_j\}} \varphi_j(u, T_{r_i}) \beta_j(v,\ \Gamma^{(r_i)}) \mathrm{P}(U(\Gamma^{(r_i)}) = \Gamma^{(r)}, \max\{0, x_i + u - v\} = x, \min\{x_i + u, v\} = y).
\end{aligned}$$

Из соотношения (8) следует, что для случайной векторной последовательности $\{(\Gamma_i,\ æ_{j,i},\ \bar{\xi}_{j,i-1});\ i \geq 0\}$ марковское свойство (7) выполняется. □

Выражение (8) представляет собой вид переходных вероятностей для марковской цепи. Правая часть этого уравнения на самом деле не зависит именно от i (времени), а зависит от значений некоторых случайных величин в этот момент времени. Следовательно, эти условные вероятности одинаковы для любых пар моментов времени τ_i, τ_{i+1}, а это означает, что рассматриваемая цепь Маркова является однородной по времени.

Необходимо учесть наличие несущественных состояний, которые могут возникнуть за счет начального распределения. Марковская цепь всегда выходит из таких состояний за один шаг, даже если начальная вероятность нахождения в них была не нулевая, и больше никогда в них не возвращается.

Введем обозначения для следующих вероятностей:

$$\mathrm{P}(\{\Gamma_i = \Gamma^{(s)},\ æ_{j,i} = x,\ \bar{\xi}_{j,i-1} = y\}) = Q_{j,i}(\Gamma^{(s)}; x; y).$$

Пусть по определению справедливы равенства:

$$\Gamma^{(0)} \equiv \Gamma^{(2m)},\ \Gamma^{(2m+1)} \equiv \Gamma^{(1)},\ \Gamma^{(2m+2)} \equiv \Gamma^{(2)},\ T_0 \equiv T_{2m},\ T_{2m+1} \equiv T_1,\ T_{2m+2} \equiv T_2,$$
$$\Gamma(j) = \Gamma \setminus \{\Gamma^{(2j)}, \Gamma^{(2j+1)}, \Gamma^{(2j+2)}\},\ \Gamma'(j) = \Gamma \setminus \{\Gamma^{(2j)}, \Gamma^{(2j+1)}\}.$$

Лемма 2. Следующие состояния управляемой случайной марковской последовательности $\{(\Gamma_i,\ æ_{j,i},\ \bar{\xi}_{j,i-1});\ i \geq 0\}$ являются несущественными:

$$(\Gamma^{(s)}, x, y),\ \text{где}\ \Gamma^{(s)} \in \Gamma'(j),\ x \in \mathrm{X},\ y = \overline{1, l_j}\,;$$
$$(\Gamma^{(2j)}, x, y),\ \text{где}\ x \in \mathrm{X} \setminus \{0\},\ y = \overline{0, l_j - 1};$$
$$(\Gamma^{(2j+1)}, x, y),\ \text{где}\ x \in \mathrm{X},\ y = \overline{l'_j + 1, l_j}\,;$$
$$(\Gamma^{(2j+1)}, x, y),\ \text{где}\ x \in \mathrm{X} \setminus \{0\},\ y = \overline{0, l'_j - 1}.$$

Доказательство. Для перечисленных состояний, учитывая связь многомерных распределений, а также используя теорему умножения вероятностей, соотношение (8) и свойства отображения $U(\cdot)\colon \Gamma \to \Gamma$, при $i \geq 0$ последовательно находим:

1) для $Q_{j,i+1}(\mathit{\Gamma}^{(s)};x;y)$, $\mathit{\Gamma}^{(s)} \in \Gamma'(j)$, $x \in \mathrm{X}$, $y=\overline{1,l_j}$ получаем:

$$Q_{j,i+1}(\mathit{\Gamma}^{(s)};x;y)=\sum_{r=1}^{2m}\sum_{w=0}^{\infty}\sum_{g=0}^{l_j}Q_{j,i}(\mathit{\Gamma}^{(r)};w;g)\sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v\in\{0,l'_j,l_j\}}\varphi_j(u,T_r)\beta_j(v,\ \mathit{\Gamma}^{(r)})\times$$

$$\times\ \mathrm{P}(U(\mathit{\Gamma}^{(r)})=\mathit{\Gamma}^{(s)},\max\{0,w+u-v\}=x,\min\{w+u,v\}=y)=$$

$$=\sum_{w=0}^{\infty}\sum_{g=0}^{l_j}Q_{j,i}(\mathit{\Gamma}^{(s-1)};w;g)\sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v\in\{0,l'_j,l_j\}}\varphi_j(u,T_{s-1})\beta_j(v,\ \mathit{\Gamma}^{(s-1)})\times$$

$$\times\ \mathrm{P}(\max\{0,w+u-v\}=x,\min\{w+u,v\}=y)=$$

$$=\sum_{w=0}^{\infty}\sum_{g=0}^{l_j}Q_{j,i}(\mathit{\Gamma}^{(s-1)};w;g)\sum_{u=0}^{\infty}\varphi_j(u,T_{s-1})\mathrm{P}(\max\{0;w+u\}=x,\min\{w+u;0\}=y)=0.$$

В данном случае $y > 0$, и равенство нулю следует из того, что условие $\min\{w+u,0\}=y$ никогда не выполнится.

2) для $Q_{j,i+1}(\mathit{\Gamma}^{(2j)};x;y)$, $x \in \mathrm{X}\setminus\{0\}$, $y=\overline{0,l_j-1}$ справедливо следующее:

$$Q_{j,i+1}(\mathit{\Gamma}^{(2j)};x;y)=\sum_{r=1}^{2m}\sum_{w=0}^{\infty}\sum_{g=0}^{l_j}Q_{j,i}(\mathit{\Gamma}^{(r)};w;g)\sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v\in\{0,l'_j,l_j\}}\varphi_j(u,T_r)\beta_j(v,\ \mathit{\Gamma}^{(r)})\times$$

$$\times\ \mathrm{P}(U(\mathit{\Gamma}^{(r)})=\mathit{\Gamma}^{(2j)},\max\{0,w+u-v\}=x,\min\{w+u,v\}=y)=$$

$$=\sum_{w=0}^{\infty}\sum_{g=0}^{l_j}Q_{j,i}(\mathit{\Gamma}^{(2j-1)};w;g)\sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v\in\{0,l'_j,l_j\}}\varphi_j(u,T_{2j-1})\beta_j(v,\ \mathit{\Gamma}^{(2j-1)})\times$$

$$\times\ \mathrm{P}(\max\{0,w+u-v\}=x,\min\{w+u,v\}=y)=$$

$$=\sum_{w=0}^{\infty}\sum_{g=0}^{l_j}Q_{j,i}(\mathit{\Gamma}^{(2j-1)};w;g)\sum_{u=0}^{\infty}\varphi_j(u,T_{2j-1})\times$$

$$\times\ \mathrm{P}(\max\{0,w+u-l_j\}=x,\min\{w+u,l_j\}=y)=0.$$

Рассмотрим два возможных варианта:

a) в случае $w + u < l_j$ равенство нулю следует из того, что условие $\max\{0,w+u-l_j\}=x$ невыполнимо при $x \in \mathrm{X}\setminus\{0\}$;

b) в случае $w + u \geq l_j$ к равенству нулю приводит то, что невозможно выполнить условие $\min\{w + u, l_j\} = y$ при $y=\overline{0,l_j-1}$.

3) для $Q_{j,i+1}(\mathit{\Gamma}^{(2j+1)};x;y)$ последовательно получим:

$$Q_{j,i+1}(\Gamma^{(2j+1)};x;y)=\sum_{r=1}^{2m}\sum_{w=0}^{\infty}\sum_{g=0}^{l_j}Q_{j,i}(\Gamma^{(r)};w;g)\sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v\in\{0,l'_j,l_j\}}\varphi_j(u,T_r)\beta_j(v,\ \Gamma^{(r)})\times$$

$$\times\ \mathrm{P}(U(\Gamma^{(r)})=\Gamma^{(2j+1)},\max\{0,w+u-v\}=x,\min\{w+u,v\}=y)=$$

$$=\sum_{w=0}^{\infty}\sum_{g=0}^{l_j}Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)};w;g)\sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v\in\{0,l'_j,l_j\}}\varphi_j(u,T_{2j})\beta_j(v,\ \Gamma^{(2j)})\times$$

$$\times\ \mathrm{P}(\max\{0,w+u-v\}=x,\min\{w+u,v\}=y)=$$

$$=\sum_{w=0}^{\infty}\sum_{g=0}^{l_j}Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)};w;g)\sum_{u=0}^{\infty}\varphi_j(u,T_{2j})\mathrm{P}(\max\{0,w+u-l'_j\}=x,\min\{w+u,l'_j\}=y)=0.$$

В случае $y=\overline{l'_j+1,l_j}$ равенство нулю следует из невыполнимости условия $\min\{w+u,l'_j\}=y$.

При $y=\overline{0,l'_j-1}$ необходимо рассмотреть две возможности:

a) $w+u<l'_j$ равенство нулю следует из того, что при $x\in X\setminus\{0\}$ никогда не выполнится условие $\max\{0,w+u-l'_j\}=x$;

b) $w+u\geq l'_j$ равенство нулю возникает, поскольку при $y=\overline{0,l'_j-1}$ невозможно выполнить условие $\min\{w+u,l'_j\}=y$. □

5. Применение кибернетического подхода для построения математической модели выходных потоков в системе с приоритетным направлением

Ниже рассматривается система массового обслуживания, являющаяся математической моделью управления m независимыми конфликтными потоками $\Pi_1, \Pi_2,\ldots, \Pi_m$. Поступающие в систему потоки можно разделить на три типа: Π_1 — поток малой интенсивности, заявки которого пользуются приоритетом при обслуживании, $\Pi_2,\ldots, \Pi_{m-1}$ — потоки средней интенсивности и без преимуществ по обслуживанию, Π_m — интенсивный поток без преимуществ по обслуживанию. Приоритет первого потока заключается в том, что если поступила хотя бы одна заявка по первому направлению, то она должна быть обслужена как можно быстрее, но при этом, не прерывая уже проводящееся обслуживание, других требований. Как и в случае циклической системы, обслуживание требований из конфликтных потоков $\Pi_1, \Pi_2,\ldots, \Pi_m$ происходит в непересекающиеся промежутки времени. Для наиболее интенсивного потока Π_m введем еще одно дополнительное состояние, в котором будет продолжаться его обслуживание.

У каждого из m конфликтных потоков также есть основной этап обслуживания и этап переналадки, помимо этого введено одно дополнительное состояние $\Gamma^{(2m+1)}$ для обслуживания потока Π_m. Таким образом, обслуживающее устройство имеет ровно $2m + 1$ состояние $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, ..., \Gamma^{(2m)}, \Gamma^{(2m+1)}$, где:

$\Gamma^{(2j-1)}$ — состояние обслуживающего устройства, при котором пропускается поток Π_j с интенсивностью $\mu_j > 0$ и не пропускаются остальные потоки;

$\Gamma^{(2j)}$ — состояние обслуживающего устройства, при котором пропускается поток Π_j с интенсивностью $\mu'_j > \mu_j$ и не пропускаются остальные;

$\Gamma^{(2m+1)}$ — состояние обслуживающего устройства, при котором пропускается только поток Π_m с интенсивностью $\mu''_m > \mu_m$.

Здесь μ_j (μ'_j) определяет число машин, обслуживающихся в единицу времени в состоянии $\Gamma^{(2j-1)}$ ($\Gamma^{(2j)}$) соответственно, а μ''_m определяет количество требований, обрабатываемых в единицу времени в состоянии $\Gamma^{(2m+1)}$. Длительности состояний $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, ..., \Gamma^{(2m+1)}$ равны $T_1, T_2, ..., T_{2m+1}$ единиц времени. Граф смены состояний обслуживающего устройства представлен на рис. 2.

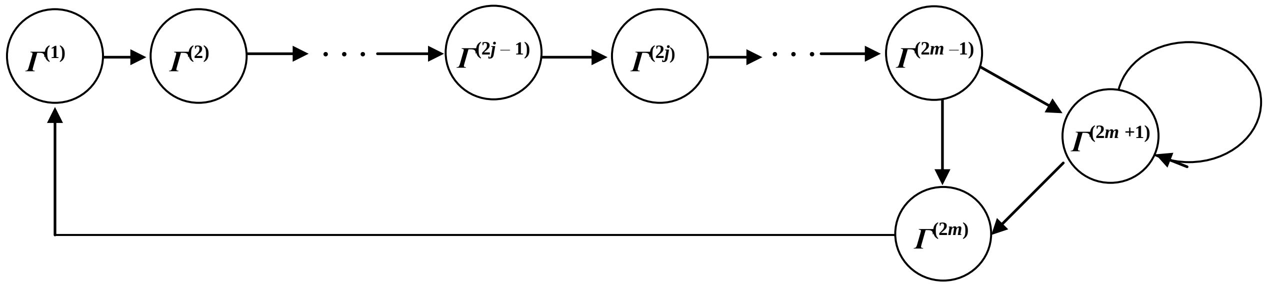

Рис. 2. Граф смены состояний обслуживающего устройства

Изучать характеристики системы также будем в дискретные моменты τ_i, где $i = 0, 1, \ldots$ переключений состояний светофора или на каждом из промежутков $[\tau_i, \tau_{i+1})$, причем начальный момент времени τ_0 совпадает с некоторым моментом переключения состояния обслуживающего устройства. Элементы множества $\tau = \{\tau_i;\ i = 0, 1, \ldots\}$ случайны, поскольку значения $T_1, T_2, ..., T_{2m+1}$ различны и можно задавать произвольные вероятности для состояний светофора в начальный момент времени τ_0, а последовательность переключений состояний обслуживающего устройства зависит от случайного поступления заявок по приоритетному потоку Π_1. Для построения математической модели системы, как и в предыдущем случае, будем использовать кибернетический подход. Функциональная схема приоритетной системы обслуживания аналогична случаю с циклическим обслуживанием, представленному на рис. 1. Отличие состоит в алгоритме смены состояний обслуживающего устройства (см. рис. 2). Согласно кибернетическому подходу в схеме изучаемой системы выделяют следующие составляющие блоки.

1. Потоки $\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_m$ первичных требований — первый тип входных полюсов, потоки $\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_m$ считаем пуассоновскими соответственно с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, здесь $\lambda_1 << \lambda_m$.

2. Независимые потоки насыщения $\Pi'_1, \Pi'_2, \ldots, \Pi'_m$ — второй тип входных полюсов.

3. Накопители $O_1, O_2, \ldots, O_m$ неограниченного объема — внешняя память.

4. Экстремальные стратегии обслуживания $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_m$ — блок по переработке информации внешней памяти.

5. Обслуживающее устройство с $2m + 1$ состояниями $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, ..., \Gamma^{(2m)}, \Gamma^{(2m+1)}$ — внутренняя память.

6. Потоки $\overline{\Pi}_1, \overline{\Pi}_2, \ldots, \overline{\Pi}_m$ обслуженных требований — выходные полюса.

6. Кодирование информации блоков схемы приоритетной управляющей системы

Введем на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \Im, P(\cdot))$ при $j = \overline{1, m}$ и $i = 0, 1, \ldots$ следующие случайные величины и элементы:

a) $\eta_{j,\,i}$ — число заявок потока Π_j, пришедших за время $[\tau_i, \tau_{i+1})$, дискретная случайная величина $\eta_{j,\,i}$ принимает значения из множества $X = \{0, 1, \ldots\}$;

b) $\xi_{j,\,i}$ — максимально возможное число заявок, которое может быть обслужено за время $[\tau_i, \tau_{i+1})$ из очереди потока Π_j; любая случайная величина $\xi_{j,i}$ при $j = \overline{1, m-1}$ принимает значения из множества $\{0, l'_j, l_j\}$, а величина $\xi_{m,i}$ принимает значения из множества $\{0, l'_m, l''_m, l_m\}$. Величина l_j при $j = \overline{1, m}$ определяет максимально возможное число заявок потока Π_j, которое может обслужиться за время работы сигнала $\Gamma^{(2j-1)}$ и $l_j = [\mu_j T_{2j-1}]$, величина l'_j — это максимальное число требований потока Π_j, которое может обслужиться за время работы сигнала $\Gamma^{(2j)}$ и $l'_j = [\mu'_j T_{2j}]$, а l''_m — это максимальное число требований потока Π_m, которое может обслужиться за время работы сигнала $\Gamma^{(2m+1)}$ и $l''_m = [\mu''_m T_{2m+1}]$; причем $l_j \geq l'_j$, так как $T_{2j-1} >> T_{2j}$, а $l_m \geq l''_m$, поскольку $T_{2m-1} >> T_{2m+1}$;

c) Γ_i — состояние светофора на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$, каждый из случайных элементов Γ_i принимает значения из набора $\Gamma = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, ..., \Gamma^{(2m+1)}\}$;

d) $æ_{j,\,i}$ — длина очереди по потоку Π_j в момент времени τ_i, $æ_{j,\,i}$ является дискретной случайной величиной со значениями из множества X;

e) $\overline{\xi}_{j,\,i}$ — число реально обслуженных заявок потока Π_j за промежуток времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$, случайная величина $\overline{\xi}_{j,\,i}$ принимает свои значения из множества $Y_j = \{0, 1, \ldots, l_j\}$;

f) $\overline{\xi}_{j,\,-1}$ — число реально обслуженных заявок потока Π_j за время $[0, \tau_0)$, причем $\overline{\xi}_{j,\,-1} \in Y_j$.

Входные потоки и потоки насыщения также будем задавать нелокально. Вместо непрерывного случайного процесса $\Pi_j = \{\eta_j(t);\ t \geq 0\}$, $j = \overline{1, m}$ рассмотрим последовательности $\Pi_j^* = \{\eta_{j,i};\ i \geq 0\}$ $j=\overline{1,m}$ из неотрицательных целочисленных случайных величин. Как и в случае циклической системы, для $\eta_{j,i}$ можно записать следующие условные вероятности:

$$\mathrm{P}(\eta_{j,i} = u_j \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r)}) = (\lambda_j T_r)^{u_j}(u_j!)^{-1}\exp\{-\lambda_j T_r\} = \varphi_j(u_j, T_r), \text{ где}$$
$$u_j \in \mathrm{X},\ j=\overline{1,m},\ r=\overline{1,2m+1},\ i = 0, 1, \ldots. \tag{9}$$

Поток насыщения по j–му направлению зададим в виде случайной последовательности $\Pi'_j = \{\xi_{j,i};\ i \geq 0\}$, $j=\overline{1,m}$. Введем, при $\Gamma^{(r)} \in \Gamma$, в рассмотрение следующие функции:

$$f_j(\Gamma^{(r)}) = \begin{cases} l_j & \text{при } r = 2j-1,\ \ j=\overline{1,m}; \\ l'_j & \text{при } r = 2j,\ \ j=\overline{1,m}; \\ l''_m & \text{при } r = 2m+1,\ \ j=m; \\ 0 & \text{при } r \in \{1, 2, \ldots, 2m+1\}\setminus\{2j-1, 2j\},\ \ j=\overline{1,m-1}; \\ 0 & \text{при } r \in \{1, 2, \ldots, 2m+1\}\setminus\{2m-1, 2m, 2m+1\},\ \ j=m. \end{cases}$$

Случайные величины $\xi_{j,i}$ определяются с помощью функций $f_j(\Gamma^{(r)})$ следующим образом: $\xi_{j,i} = f_j(\Gamma_i)$, где $j=\overline{1,m}$, $i = 0, 1, \ldots$.

Для $\xi_{j,i}$ можно записать вырожденное условное распределение вида

$$\mathrm{P}(\xi_{j,i} = v \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r)}) = \beta_j(v, \Gamma^{(r)}), \text{ где} \tag{10}$$

$$\beta_j(v, \Gamma^{(r)}) = \begin{cases} 1 \text{ при } & v = l_j,\ \ r = 2j-1,\ j=\overline{1,m}; \\ 1 \text{ при } & v = l'_j,\ \ r = 2j,\ j=\overline{1,m}; \\ 1 \text{ при } & v = l''_m,\ \ r = 2m+1,\ j=m; \\ 1 \text{ при } & v = 0,\ \ r \in \{1, 2, \ldots, 2m+1\}\setminus\{2j-1, 2j\},\ j=\overline{1,m-1}; \\ 1 \text{ при } & v = 0,\ r \in \{1, 2, \ldots, 2m+1\}\setminus\{2m-1, 2m, 2m+1\},\ j=m; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{11}$$

Следующее состояние Γ_{i+1} обслуживающего устройства зависит от предыдущего состояния Γ_i и числа заявок, поступивших по приоритетному потоку Π_1. Введем функцию $U(\Gamma^{(r)}, w_1, u_1)$ следующим образом:

$$U(\Gamma^{(r)}, w_1, u_1) = \begin{cases} \Gamma^{(1)} & \text{при } r = 2m; \\ \Gamma^{(r+1)} & \text{при } r=\overline{1,2m-2}; \\ \Gamma^{(2m)} & \text{при } r \in \{2m-1, 2m+1\},\ w_1 = 0,\ u_1 > 0; \\ \Gamma^{(2m)} & \text{при } r \in \{2m-1, 2m+1\},\ w_1 > 0; \\ \Gamma^{(2m+1)} & \text{при } r \in \{2m-1, 2m+1\},\ w_1 = u_1 = 0. \end{cases}$$

Зависимость Γ_{i+1} от Γ_i определяется рекуррентным соотношением (12).

$$\Gamma_{i+1} = U(\Gamma_i,\ æ_{1,i},\ \eta_{1,i}),\quad i = 0, 1, \ldots. \tag{12}$$

Будем говорить, что соотношение (12) и функция $U(\Gamma^{(r)}, w_1, u_1)$ определяют некоторый однородный алгоритм с упреждением, который управляет изменением структуры обслуживающего устройства по информации о наличии заявок в очереди по потоку Π_1 и по информации о текущем внутреннем состоянии. В этом смысле данный алгоритм основывается на минимальном количестве информации о состоянии системы с переменной структурой и поэтому легко может быть реализован. Заявки обслуживаются в соответствии с экстремальной стратегией обслуживания, т.е. что справедливо выражение:

$$\bar{\xi}_{j,i} = \min\{æ_{j,i} + \eta_{j,i},\ \xi_{j,i}\} = \zeta_j\,(æ_{j,i},\ \eta_{j,i},\ \xi_{j,i}),\ \ i = 0, 1, \ldots,\ \ j = \overline{1, m}. \tag{13}$$

По аналогии со случаем с циклической системой доказывается, что для очереди справедливо соотношение:

$$æ_{j,i+1} = \max\{0,\ æ_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\} = \gamma_j\,(æ_{j,i},\ \eta_{j,i},\ \xi_{j,i}),\ \ i = 0, 1, \ldots,\ \ j = \overline{1, m}. \tag{14}$$

Случайные величины $\eta_{j,i}$ и $\xi_{j,i}$, $j = \overline{1, m}$ независимы при условии, что состояние обслуживающего устройства известно.

В случае приоритетной системы пятимерные векторные последовательности $\{(\Gamma_i,\ æ_{1,i},\ æ_{j,i},\ \bar{\xi}_{1,i-1},\ \bar{\xi}_{j,i-1});\ i \geq 0\}$, $j = \overline{2, m}$ задают нелокальное описание выходных потоков по направлениям 2 — m. Как и в предыдущем случае, в описание включаются длины очередей по потокам и состояние обслуживающего устройства**.** Отличие состоит в том, что в описание выходного потока добавляются компоненты $\bar{\xi}_{1,i-1}$ и $æ_{1,i}$ относящиеся к приоритетному первому потоку. Сам же информативный поток Π_1 описывается трехмерной последовательностью $\{(\Gamma_i,\ æ_{1,i},\ \bar{\xi}_{1,i-1});\ i \geq 0\}$. Далее будем рассматривать только пятимерную векторную последовательность $\{(\Gamma_i,\ æ_{1,i},\ æ_{m,i},\ \bar{\xi}_{1,i-1},\ \bar{\xi}_{m,i-1});\ i \geq 0\}$. Выбор данной последовательности обусловлен тем, что она определяет поведение системы как по приоритетному первому потоку Π_1, так и по наиболее интенсивному потоку Π_m.

Результаты для последовательностей $\{(\Gamma_i,\ æ_{1,i},\ æ_{j,i},\ \bar{\xi}_{1,i-1},\ \bar{\xi}_{j,i-1});\ i \geq 0\}$, $\{(\Gamma_i,\ æ_{1,i},\ æ_{2,i},\ \ldots,\ æ_{m,i},\ \bar{\xi}_{1,i-1},\ \bar{\xi}_{2,i-1},\ \ldots,\ \bar{\xi}_{m,i-1});\ i \geq 0\}$, $\{(\Gamma_i,\ æ_{1,i},\ \bar{\xi}_{1,i-1});\ i \geq 0\}$, $j = \overline{2, m-1}$ можно получить аналогично. Считаем, что в начальный момент времени τ_0 при $\Gamma^{(s)} \in \Gamma$, $x_1 \in X$, $x_m \in X$, $y_1 \in Y_1$, $y_m \in Y_m$ известны вероятности $P(\Gamma_0 = \Gamma^{(s)},\ æ_{1,0} = x_1,\ æ_{m,0} = x_m,\ \bar{\xi}_{1,-1} = y_1,\ \bar{\xi}_{m,-1} = y_m)$.

7. Марковское свойство пятимерной векторной последовательности $\{(\Gamma_i, æ_{1,i}, æ_{m,i}, \bar{\xi}_{1,i-1}, \bar{\xi}_{m,i-1}); i \ge 0\}$

Для последовательности $\{(\Gamma_i, æ_{1,i}, æ_{m,i}, \bar{\xi}_{1,i-1}, \bar{\xi}_{m,i-1}); i \ge 0\}$, включающей в себя описание состояния обслуживающего устройства, величины очередей по потокам Π_1, Π_m и выходных потоков по данным направлениям при $i = 0, 1, \ldots$, имеет место следующее рекуррентное соотношение:

$$(\Gamma_{i+1}, æ_{1,i+1}, æ_{m,i+1}, \bar{\xi}_{1,i}, \bar{\xi}_{m,i}) =$$
$$= (U(\Gamma_i, æ_{1,i}, \eta_{1,i}), \gamma_1(æ_{1,i}, \eta_{1,i}, \xi_{1,i}), \gamma_m(æ_{m,i}, \eta_{m,i}, \xi_{m,i}), \zeta_1(æ_{1,i}, \eta_{1,i}, \xi_{1,i}),$$
$$\zeta_m(æ_{m,i}, \eta_{m,i}, \xi_{m,i})\}).$$

Введем в рассмотрение следующие множества состояний:

$$\mathrm{A}_k = \{\omega: \Gamma_k = \Gamma^{(r_k)},\ æ_{1,k} = x_{1,k},\ æ_{m,k} = x_{m,k},\ \bar{\xi}_{1,k-1} = y_{1,k},\ \bar{\xi}_{m,k-1} = y_{m,k}\},$$
$$\Gamma^{(r_k)} \in \Gamma,\ x_{1,k} \in \mathrm{X},$$
$$x_{m,k} \in \mathrm{X},\ y_{1,k} \in \mathrm{Y}_1,\ y_{m,k} \in \mathrm{Y}_m;$$
$$\mathrm{B}_{i+1} = \{\omega: \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r)},\ æ_{1,i+1} = x_1,\ æ_{m,i+1} = x_m,\ \bar{\xi}_{1,i} = y_1,\ \bar{\xi}_{m,i} = y_m\},$$
$$\Gamma^{(r)} \in \Gamma,\ x_1 \in \mathrm{X}, x_m \in \mathrm{X},\ y_1 \in \mathrm{Y}_1, y_m \in \mathrm{Y}_m.$$

Докажем, что в силу выбора дискретных моментов времени наблюдения $\{\tau_i;\ i = 0, 1, \ldots\}$ последовательность $\{(\Gamma_i, æ_{1,i}, æ_{m,i}, \bar{\xi}_{1,i-1}, \bar{\xi}_{m,i-1}); i \ge 0\}$ будет обладать свойством марковости.

Лемма 3. При заданном распределении начального вектора $(\Gamma_0, æ_{1,0}, æ_{m,0}, \bar{\xi}_{1,-1}, \bar{\xi}_{m,-1})$ управляемая случайная векторная последовательность $\{(\Gamma_i, æ_{1,i}, æ_{m,i}, \bar{\xi}_{1,i-1}, \bar{\xi}_{m,i-1}); i \ge 0\}$ является марковской.

Доказательство. Марковское свойство для случайной последовательности состоит в следующем ограничении:

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}_{i+1} \mid \mathrm{A}_k,\ k = \overline{0,i}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}_{i+1} \mid \mathrm{A}_i). \tag{15}$$

Докажем, что для $\{(\Gamma_i, æ_{1,i}, æ_{m,i}, \bar{\xi}_{1,i-1}, \bar{\xi}_{m,i-1}); i \ge 0\}$ это свойство справедливо. Рассмотрим отдельно левую часть выражения (15). Преобразуем ее, используя формулу полной вероятности, а также учитывая, что для $j = \overline{1,m}$ случайные величины $\eta_{j,i}$ и $\xi_{j,i}$ условно независимы при фиксированном значении Γ_k, $æ_{j,k}$ и $\bar{\xi}_{j,k-1}$, где $k = \overline{0,i}$. Последовательно получаем:

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}_{i+1} \mid \mathrm{A}_k,\ k = \overline{0,i}) = \sum_{v_1, v_m = 0}^{\infty} \sum_{u_1, u_m = 0}^{\infty} \mathrm{P}(\mathrm{B}_{i+1},\ \bar{\xi}_{1,i} = y_1,\ \bar{\xi}_{m,i} = y_m,\ \eta_{1,i} = u_1,\ \eta_{m,i} = u_m,$$
$$\xi_{1,i} = v_1,\ \xi_{m,i} = v_m \mid \mathrm{A}_k,\ k = \overline{0,i}) =$$

$$= \sum_{v_1=0}^{\infty}\sum_{v_m=0}^{\infty}\sum_{u_1=0}^{\infty}\sum_{u_m=0}^{\infty} \mathrm{P}(\eta_{1,\,i} = u_1,\ \eta_{m,\,i} = u_m,\ \xi_{1,\,i} = v_1,\ \xi_{m,\,i} = v_m \mid \mathrm{A}_k,\ k = \overline{0,i}\,) \times$$

$$\times\ \mathrm{P}(\mathrm{B}_{i+1} \mid \mathrm{A}_k,\ k = \overline{0,i}\,,\ \eta_{1,\,i} = u_1,\ \eta_{m,\,i} = u_m,\ \xi_{1,\,i} = v_1,\ \xi_{m,\,i} = v_m) =$$

$$= \sum_{v_1=0}^{\infty}\sum_{v_m=0}^{\infty}\sum_{u_1=0}^{\infty}\sum_{u_m=0}^{\infty} \mathrm{P}(\eta_{1,\,i} = u_1 \mid \mathrm{A}_k,\ k = \overline{0,i}\,)\ \mathrm{P}(\eta_{m,\,i} = u_m \mid \mathrm{A}_k,\ k = \overline{0,i}\,) \times$$

$$\times\ \mathrm{P}(\xi_{1,\,i} = v_1 \mid \mathrm{A}_k,\ k = \overline{0,i}\,)\ \mathrm{P}(\xi_{m,\,i} = v_m \mid \mathrm{A}_k,\ k = \overline{0,i}\,) \times$$

$$\times\ \mathrm{P}(\mathrm{B}_{i+1} \mid \mathrm{A}_k,\ k = \overline{0,i}\,,\ \eta_{1,\,i} = u_1,\ \eta_{m,\,i} = u_m,\ \xi_{1,\,i} = v_1,\ \xi_{m,\,i} = v_m).$$

Воспользуемся тем, что случайные величины $\eta_{j,\,i}$, $æ_{j,\,k}$, $\bar{\xi}_{j,\,k-1}$, $k = \overline{0,i}$ и Γ_k, $k = \overline{0,i-1}$ условно независимы при фиксированном значении Γ_i, и тем, что $\xi_{j,\,i}$, $æ_{j,\,k}$, $\bar{\xi}_{j,\,k-1}$, $k = \overline{0,i}$ и Γ_k, $k = \overline{0,i-1}$ также являются условно независимыми при фиксированном значении Γ_i. Затем используем соотношения (12)—(14).

$$\sum_{v_1=0}^{\infty}\sum_{v_m=0}^{\infty}\sum_{u_1=0}^{\infty}\sum_{u_m=0}^{\infty} \mathrm{P}(\eta_{1,\,i} = u_1 \mid \mathrm{A}_k,\ k = \overline{0,i}\,)\mathrm{P}(\eta_{m,\,i} = u_m \mid \mathrm{A}_k,\ k = \overline{0,i}\,) \times$$

$$\times\ \mathrm{P}(\xi_{1,\,i} = v_1 \mid \mathrm{A}_k,\ k = \overline{0,i}\,)\ \mathrm{P}(\xi_{m,\,i} = v_m \mid \mathrm{A}_k,\ k = \overline{0,i}\,) \times$$

$$\times\ \mathrm{P}(\mathrm{B}_{i+1} \mid \mathrm{A}_k,\ k = \overline{0,i}\,,\ \eta_{1,\,i} = u_1,\ \eta_{m,\,i} = u_m,\ \xi_{1,\,i} = v_1,\ \xi_{m,\,i} = v_m) =$$

$$= \sum_{v_1 \in \{0,\ l_1',\ l_1\}}\ \sum_{v_m \in \{0,\ l_m',\ l_m'',\ l_m\}}\ \sum_{u_1=0}^{\infty}\ \sum_{u_m=0}^{\infty} \mathrm{P}(\eta_{1,\,i} = u_1 \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)})\ \mathrm{P}(\eta_{m,\,i} = u_m \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}) \times$$

$$\times\ \mathrm{P}(\xi_{1,\,i} = v_1 \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)})\ \mathrm{P}(\xi_{m,\,i} = v_m \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}) \times$$

$$\times \mathrm{P}(U(\Gamma^{(r_i)},\ x_{1,i},\ u_1) = \Gamma^{(r)},\ \gamma_1(x_{1,i},\ u_1,\ v_1) = x_1,\ \gamma_m(x_{m,i},\ u_m,\ v_m) = x_m,\ \zeta_1(x_{1,i},\ u_1,\ v_1) = y_1,$$
$$\zeta_m(x_{m,i},\ u_m,\ v_m) = y_m).$$

Если воспользоваться соотношениями (9) и (10), то можно получить следующее:

$$\sum_{v_1 \in \{0,l_1',l_1\}}\ \sum_{v_m \in \{0,l_m',l_m'',l_m\}}\ \sum_{u_1=0}^{\infty}\ \sum_{u_m=0}^{\infty} \mathrm{P}(\eta_{1,\,i} = u_1 \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)})\ \mathrm{P}(\eta_{m,\,i} = u_m \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}) \times$$

$$\times\ \mathrm{P}(\xi_{1,\,i} = v_1 \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)})\ \mathrm{P}(\xi_{m,\,i} = v_m \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}) \times$$

$$\times\ \mathrm{P}(U(\Gamma^{(r_i)},\ x_{1,\,i},\ u_1) = \Gamma^{(r)},\ \gamma_1(x_{1,\,i},\ u_1,\ v_1) = x_1,\ \gamma_m(x_{m,\,i},\ u_m, v_m) = x_m,\ \zeta_1(x_{1,\,i},\ u_1, v_1) = y_1,$$
$$\zeta_m(x_{m,\,i},\ u_m, v_m) = y_m) =$$

$$= \sum_{v_1 \in \{0,l_1',l_1\}}\ \sum_{v_m \in \{0,l_m',l_m'',l_m\}}\ \sum_{u_1=0}^{\infty}\ \sum_{u_m=0}^{\infty} \varphi_1(u_1, T_{r_i})\varphi_m(u_m, T_{r_i})\beta_1(v_1,\ \Gamma^{(r_i)})\beta_m(v_m,\ \Gamma^{(r_i)}) \times$$

$$\times\ \mathrm{P}(U(\Gamma^{(r_i)},\ x_{1,\,i},\ u_1) = \Gamma^{(r)},\ \gamma_1(x_{1,\,i},\ u_1,\ v_1) = x_1,\ \gamma_m(x_{m,\,i},\ u_m, v_m) = x_m,$$
$$\zeta_1(x_{1,\,i},\ u_1, v_1) = y_1,\ \zeta_m(x_{m,\,i},\ u_m, v_m) = y_m).$$

Теперь повторим эти же выкладки с незначительными изменениями для правой части выражения (15). При ее преобразовании также используем формулу полной вероятности и учитываем, что случайные величины $\eta_{j,\ i}$ и $\xi_{j,\ i}$ условно независимы при фиксированных значениях Γ_i, æ$_{j,\,i}$ и $\overline{\xi}_{j,\,i-1}$.

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}_{i+1} \mid \mathrm{A}_i) = \sum_{v_1, v_m=0}^{\infty} \sum_{u_1, u_m=0}^{\infty} \mathrm{P}(\mathrm{B}_{i+1},\ \eta_{1,\,i} = u_1,\ \eta_{m,\,i} = u_m,\ \xi_{1,\,i} = v_1,\ \xi_{m,\,i} = v_m \mid \mathrm{A}_i) =$$

$$= \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{u_1=0}^{\infty} \sum_{u_m=0}^{\infty} \mathrm{P}(\eta_{1,\,i} = u_1,\ \eta_{m,\,i} = u_m,\ \xi_{1,\,i} = v_1,\ \xi_{m,\,i} = v_m \mid \mathrm{A}_i) \times$$

$$\times\, \mathrm{P}(\mathrm{B}_{i+1} \mid \mathrm{A}_i,\ \eta_{1,\,i} = u_1,\ \eta_{m,\,i} = u_m,\ \xi_{1,\,i} = v_1,\ \xi_{m,\,i} = v_m) =$$

$$= \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{u_1=0}^{\infty} \sum_{u_m=0}^{\infty} \mathrm{P}(\eta_{1,\,i} = u_1 \mid \mathrm{A}_i)\ \mathrm{P}(\eta_{m,\,i} = u_m \mid \mathrm{A}_i)\ \mathrm{P}(\xi_{1,\,i} = v_1 \mid \mathrm{A}_i) \times$$

$$\times\, \mathrm{P}(\xi_{m,\,i} = v_m \mid \mathrm{A}_i)\ \mathrm{P}(\mathrm{B}_{i+1} \mid \mathrm{A}_i,\ \eta_{1,\,i} = u_1,\ \eta_{m,\,i} = u_m,\ \xi_{1,\,i} = v_1,\ \xi_{m,\,i} = v_m).$$

Последовательно воспользуемся тем, что случайные величины $\eta_{j,\ i}$, æ$_{j,\ i}$, $\overline{\xi}_{j,\ i-1}$ условно независимы при фиксированном значении Γ_i, и что $\xi_{j,\ i}$, æ$_{j,\ i}$, $\overline{\xi}_{j,\ i-1}$ также являются условно независимыми при фиксированном значении Γ_i. Затем применим соотношения (12) — (14).

$$\sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{u_1=0}^{\infty} \sum_{u_m=0}^{\infty} \mathrm{P}(\eta_{1,\,i} = u_1 \mid \mathrm{A}_i)\ \mathrm{P}(\eta_{m,\,i} = u_m \mid \mathrm{A}_i)\ \mathrm{P}(\xi_{1,\,i} = v_1 \mid \mathrm{A}_i)\ \mathrm{P}(\xi_{m,\,i} = v_m \mid \mathrm{A}_i) \times$$

$$\times \mathrm{P}(\mathrm{B}_{i+1} \mid \mathrm{A}_i,\ \eta_{1,\,i} = u_1,\ \eta_{m,\,i} = u_m,\ \xi_{1,\,i} = v_1,\ \xi_{m,\,i} = v_m) =$$

$$= \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{u_1=0}^{\infty} \sum_{u_m=0}^{\infty} \mathrm{P}(\eta_{1,\,i} = u_1 \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)})\ \mathrm{P}(\eta_{m,\,i} = u_m \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)})\ \mathrm{P}(\xi_{1,\,i} = v_1 \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}) \times$$

$$\times \mathrm{P}(\xi_{m,\,i} = v_m \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)})\ \mathrm{P}(U(\Gamma^{(r_i)}, x_{1,\,i}, u_1) = \Gamma^{(r)},\ \gamma_1(x_{1,\,i}, u_1, v_1) = x_1,\ \gamma_m(x_{m,\,i}, u_m, v_m) =$$

$$= x_m,\ \zeta_1(x_{1,\,i}, u_1, v_1) = y_1,\ \zeta_m(x_{m,\,i}, u_m, v_m) = y_m).$$

Учитывая соотношения (9) и (10), получим:

$$\sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{u_1=0}^{\infty} \sum_{u_m=0}^{\infty} \mathrm{P}(\eta_{1,\,i} = u_1 \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)})\ \mathrm{P}(\eta_{m,\,i} = u_m \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}) \times$$

$$\times\, \mathrm{P}(\xi_{1,i} = v_1 \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)})\ \mathrm{P}(\xi_{m,i} = v_m \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)})\ \mathrm{P}(U(\Gamma^{(r_i)}, x_{1,\,i}, u_1) = \Gamma^{(r)},$$

$$\gamma_1(x_{1,\,i}, u_1, v_1) = x_1,\ \gamma_m(x_{m,\,i}, u_m, v_m) = x_m,\ \zeta_1(x_{1,\,i}, u_1, v_1) = y_1,\ \zeta_m(x_{m,\,i}, u_m, v_m) = y_m) =$$

$$= \sum_{v_1 \in \{0, l_1', l_1\}} \ \sum_{v_m \in \{0, l_m', l_m'', l_m\}} \ \sum_{u_1=0}^{\infty} \sum_{u_m=0}^{\infty} \varphi_1(u_1, T_{r_i})\varphi_m(u_m, T_{r_i})\beta_1(v_1,\ \Gamma^{(r_i)})\beta_m(v_m,\ \Gamma^{(r_i)}) \times$$

$$\times \mathrm{P}(U(\Gamma^{(r_i)}, x_{1,\,i}, u_1) = \Gamma^{(r)},\ \gamma_1(x_{1,\,i}, u_1, v_1) = x_1,\ \gamma_m(x_{m,\,i}, u_m, v_m) = x_m,\ \zeta_1(x_{1,\,i}, u_1, v_1) = y_1,$$

$$\zeta_m(x_{m,\,i}, u_m, v_m) = y_m).$$

Таким образом, в итоге преобразования правой и левой частей выражения (15) были получены одинаковые результаты. Значит, справедливо равенство:

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}_{i+1} \mid \mathrm{A}_k,\ k = \overline{0, i}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}_{i+1} \mid \mathrm{A}_i) =$$

$$= \sum_{u_1=0}^{\infty} \sum_{u_m=0}^{\infty} \sum_{v_1 \in \{0, l_1', l_1\}} \sum_{v_m \in \{0, l_m', l_m'', l_m\}} \varphi_1(u_1, T_{r_i}) \varphi_m(u_m, T_{r_i}) \beta_1(v_1, \Gamma^{(r_i)}) \beta_m(v_m, \Gamma^{(r_i)}) \times \tag{16}$$

$\times \mathrm{P}(U(\Gamma^{(r_i)}, x_{1,i}, u_1) = \Gamma^{(r)}, \gamma_1(x_{1,i}, u_1, v_1) = x_1, \gamma_m(x_{m,i}, u_m, v_m) = x_m,$
$\zeta_1(x_{1,i}, u_1, v_1) = y_1, \zeta_m(x_{m,i}, u_m, v_m) = y_m)$.

Из соотношения (16) следует, что для векторной последовательности $\{(\Gamma_i, æ_{1,i}, æ_{m,i}, \bar{\xi}_{1,i-1}, \bar{\xi}_{m,i-1}); i \ge 0\}$ марковское свойство (15) выполняется. □

Выражение (16) фактически представляет собой вид переходных вероятностей для марковской цепи. Правая часть этого выражения на самом деле не зависит именно от i, а зависит от значений некоторых случайных величин в этот момент времени. Следовательно, эти условные вероятности одинаковы для любых пар моментов времени τ_i, τ_{i+1}, а это означает, что рассматриваемая цепь Маркова является однородной по времени. Используя способ доказательства леммы 3, нетрудно показать истинность следующего утверждения.

Утверждение 1. При заданном распределении начальных векторов $(\Gamma_0, æ_{1,0}, \bar{\xi}_{1,-1})$ и $(\Gamma_0, æ_{1,0}, æ_{2,0}, \ldots, æ_{m,0}, \bar{\xi}_{1,-1}, \bar{\xi}_{2,-1}, \ldots, \bar{\xi}_{m,-1})$ управляемые последовательности $\{(\Gamma_i, æ_{1,i}, æ_{2,i}, \ldots, æ_{m,i}, \bar{\xi}_{1,i-1}, \bar{\xi}_{2,i-1}, \ldots, \bar{\xi}_{m,i-1}); i \ge 0\}$ и $\{(\Gamma_i, æ_{1,i}, \bar{\xi}_{1,i-1}); i \ge 0\}$ будут являться однородными марковскими цепями.

Введем следующие обозначения для вероятностей

$$\mathrm{P}(\{\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(s)}, æ_{1,i+1} = x_1, æ_{m,i+1} = x_m, \bar{\xi}_{1,i} = y_1, \bar{\xi}_{m,i} = y_m\}) = \\ = Q_{i+1}(\Gamma^{(s)}; x_1; x_m; y_1; y_m).$$

Далее необходимо учесть наличие несущественных состояний, которые могут возникнуть за счет выбора начального распределения. Для пятимерной последовательности $\{(\Gamma_i, æ_{1,i}, æ_{m,i}, \bar{\xi}_{1,i-1}, \bar{\xi}_{m,i-1}); i \ge 0\}$, технология доказательства аналогична трехмерному случаю, представленному в лемме 2. Однако, трудоемкость его возрастает за счет увеличения размерности последовательности.

Пусть по определению справедливы равенства:

$$\Gamma^{(0)} \equiv \Gamma^{(2m)}, \ T_0 \equiv T_{2m}, \ \Gamma' = \Gamma \setminus \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \Gamma^{(3)}, \Gamma^{(2m)}, \Gamma^{(2m+1)}\}, \\ \Gamma'' = \Gamma \setminus \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \Gamma^{(3)}, \Gamma^{(4)}, \Gamma^{(2m)}, \Gamma^{(2m+1)}\}.$$

Лемма 4. Следующие состояния управляемой случайной векторной марковской последовательности $\{(\Gamma_i, æ_{1,i}, æ_{m,i}, \bar{\xi}_{1,i-1}, \bar{\xi}_{m,i-1}); i \ge 0\}$ являются несущественными:

$$(\Gamma^{(s)}, x_1, x_m, y_1, y_m), \ \Gamma^{(s)} \in \Gamma', \ x_1, x_m \in \mathrm{X}, \ y_1 = \overline{1, l_1}, \ y_m \in \mathrm{Y}_m;$$
$$(\Gamma^{(s)}, x_1, x_m, y_1, y_m), \ \Gamma^{(s)} \in \Gamma', \ x_1, x_m \in \mathrm{X}, \ y_1 \in \mathrm{Y}_1, \ y_m = \overline{1, l_m};$$
$$(\Gamma^{(s)}, x_1, x_m, y_1, y_m), \ \Gamma^{(s)} \in \Gamma', \ x_1, x_m \in \mathrm{X}, \ y_1 = \overline{1, l_1}, \ y_m = \overline{1, l_m};$$

$$(\Gamma^{(1)},0,x_m,y_1,y_m),\quad x_1=0,\ x_m\in \mathrm{X},\ y_1\in \mathrm{Y}_1, y_m\in \mathrm{Y}_m;$$
$$(\Gamma^{(1)},x_1,x_m,y_1,y_m),\quad x_1, x_m\in \mathrm{X},\ y_1\in \mathrm{Y}_1,\ y_m=\overline{l'_m+1,l_m};$$
$$(\Gamma^{(1)},x_1,x_m,y_1,y_m),\ x_1\in \mathrm{X},\ x_m\in \mathrm{X}\setminus\{0\}, y_1\in \mathrm{Y}_1, y_m=\overline{0,l'_m-1};$$
$$(\Gamma^{(1)},x_1,x_m,y_1,y_m),\ x_1, x_m\in \mathrm{X},\ y_1=\overline{1,l_1},\ y_m\in \mathrm{Y}_m;$$
$$(\Gamma^{(2)},x_1,x_m,y_1,y_m),\ x_1\in \mathrm{X}\setminus\{0\},\ x_m\in \mathrm{X},\ y_1=\overline{0,l_1-1},\ y_m\in \mathrm{Y}_m;$$
$$(\Gamma^{(2)},x_1,x_m,y_1,y_m),\ x_1, x_m\in \mathrm{X},\ y_1\in \mathrm{Y}_1,\ y_m=\overline{1,l_m};$$
$$(\Gamma^{(2)},x_1,x_m,0,y_m),\ x_1, x_m\in \mathrm{X},\ y_m\in \mathrm{Y}_m;$$
$$(\Gamma^{(3)},x_1,x_m,y_1,y_m),\quad x_1, x_m\in \mathrm{X},\ y_1=\overline{l'_1+1,l_1},\ y_m\in \mathrm{Y}_m;$$
$$(\Gamma^{(3)},x_1,x_m,y_1,y_m),\ x_1\in \mathrm{X}\setminus\{0\}, x_m\in \mathrm{X},\ y_1=\overline{0,l'_1-1}, y_m\in \mathrm{Y}_m;$$
$$(\Gamma^{(3)},x_1,x_m,y_1,y_m),\ x_1, x_m\in \mathrm{X},\ y_1\in \mathrm{Y}_1,\ y_m=\overline{1,l_m};$$
$$(\Gamma^{(2m)},0,x_m,y_1,y_m),\ x_m\in \mathrm{X},\ y_1\in \mathrm{Y}_1, y_m\in \mathrm{Y}_m;$$
$$(\Gamma^{(2m)},x_1,x_m,y_1,y_m),\ x_1\in \mathrm{X}, x_m\in \mathrm{X}\setminus\{0\},\ y_1\in \mathrm{Y}_1,\ y_m=\overline{0,l''_m-1};$$
$$(\Gamma^{(2m)},x_1,x_m,y_1,y_m),\ x_1\in \mathrm{X},\ x_m\in \mathrm{X}\setminus\{0\},\ y_1\in \mathrm{Y}_1,\ y_m=\overline{l''_m+1,l_m-1};$$
$$(\Gamma^{(2m)},x_1,x_m,y_1,y_m),\ x_1, x_m\in \mathrm{X},\ y_1=\overline{1,l_1},\ y_m\in \mathrm{Y}_m;$$
$$(\Gamma^{(2m+1)},x_1,x_m,y_1,y_m),\ x_1\in \mathrm{X}\setminus\{0\}, x_m\in \mathrm{X},\ y_1\in \mathrm{Y}_1, y_m\in \mathrm{Y}_m;$$
$$(\Gamma^{(2m+1)},0,x_m,y_1,y_m),\ x_m\in \mathrm{X}\setminus\{0\},\ y_1\in \mathrm{Y}_1,\ y_m=\overline{0,l''_m-1};$$
$$(\Gamma^{(2m+1)},0,x_m,y_1,y_m),\ x_m\in \mathrm{X}\setminus\{0\},\ y_1\in \mathrm{Y}_1,\ y_m=\overline{l''_m+1,l_m-1};$$
$$(\Gamma^{(2m+1)},x_1,x_m,y_1,y_m),\ x_1, x_m\in \mathrm{X},\ y_1=\overline{1,l_1},\ y_m\in \mathrm{Y}_m.$$

Доказательство. Полностью доказательство леммы 4 приведено в работе [6]. Ниже, в качестве примера проведем доказательство только для состояний $(\Gamma^{(1)},x_1,x_m,y_1,y_m)$, $x_1=0$, $x_m\in \mathrm{X}$, $y_1\in \mathrm{Y}_1$, $y_m\in \mathrm{Y}_m$; $(\Gamma^{(1)},x_1,x_m,y_1,y_m)$, x_1, $x_m\in\mathrm{X}$, $y_1\in \mathrm{Y}_1$, $y_m=\overline{l'_m+1,l_m}$; $(\Gamma^{(1)},x_1,x_m,y_1,y_m)$, $x_1\in \mathrm{X}$, $x_m\in \mathrm{X}\setminus\{0\}$, $y_m=\overline{0,l'_m-1}$, $(\Gamma^{(1)},x_1,x_m,y_1,y_m)$, x_1, $x_m\in \mathrm{X}$, $y_1=\overline{1,l_1}$, $y_m\in \mathrm{Y}_m$.

Для перечисленных состояний, учитывая связь многомерных распределений, а также используя теорему умножения вероятностей, соотношение (16) и свойства отображения $U(\cdot)$: $\Gamma\to\Gamma$, последовательно находим:

$$Q_{i+1}(\Gamma^{(1)};x_1;x_m;y_1;y_m)=\sum_{r=1}^{2m+1}\sum_{w_1=0}^{\infty}\sum_{w_m=0}^{\infty}\sum_{g_1=0}^{l_1}\sum_{g_m=0}^{l_m}Q_i(\Gamma^{(r)};w_1;w_m;g_1;g_m)\times$$
$$\times\sum_{u_1=0}^{\infty}\sum_{u_m=0}^{\infty}\sum_{v_1\in\{0,l'_1,l_1\}}\sum_{v_m\in\{0,l'_m,l''_m,l_m\}}\varphi_1(u_1,T_r)\varphi_m(u_m,T_r)\beta_1(v_1,\ \Gamma^{(r)})\beta_m(v_m,\ \Gamma^{(r)})\times$$
$$\times\ \mathrm{P}(U(\Gamma^{(r)},w_1,u_1)=\Gamma^{(1)},\gamma_1(w_1,u_1,v_1)=x_1,\gamma_m(w_m,u_m,v_m)=x_m,\zeta_1(w_1,u_1,v_1)=y_1,$$
$$\zeta_m(w_m,u_m,v_m)=y_m)=$$

$$= \sum_{w_m=0}^{\infty} \sum_{g_1=0}^{l_1} \sum_{g_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)};0;w_m;g_1;g_m)\times$$

$$\times \sum_{u_1=1}^{\infty} \sum_{u_m=0}^{\infty} \sum_{v_1\in\{0,l_1',l_1\}} \sum_{v_m\in\{0,l_m',l_m'',l_m\}} \varphi_1(u_1,T_{2m})\varphi_m(u_m,T_{2m})\beta_1(v_1,\ \Gamma^{(2m)})\times$$

$$\times\beta_m(v_m,\ \Gamma^{(2m)})\mathrm{P}(\gamma_1(0,u_1,v_1)=x_1,\gamma_m(w_m,u_m,v_m)=x_m,\zeta_1(0,u_1,v_1)=y_1,$$

$$\zeta_m(w_m,u_m,v_m)=y_m)\ +\sum_{w_1=1}^{\infty}\sum_{w_m=0}^{\infty}\sum_{g_1=0}^{l_1}\sum_{g_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)};w_1;w_m;g_1;g_m)\times$$

$$\times \sum_{u_1=0}^{\infty} \sum_{u_m=0}^{\infty} \sum_{v_1\in\{0,l_1',l_1\}} \sum_{v_m\in\{0,l_m',l_m'',l_m\}} \varphi_1(u_1,T_{2m})\varphi_m(u_m,T_{2m})\beta_1(v_1,\ \Gamma^{(2m)})\beta_m(v_m,\ \Gamma^{(2m)})\times$$

$$\times\ \mathrm{P}(\gamma_1(w_1,u_1,v_1)=x_1,\gamma_m(w_m,u_m,v_m)=x_m,\zeta_1(w_1,u_1,v_1)=y_1,\zeta_m(w_m,u_m,v_m)=y_m)=$$

$$= \sum_{w_m=0}^{\infty} \sum_{g_1=0}^{l_1} \sum_{g_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)};0;w_m;g_1;g_m)\sum_{u_1=1}^{\infty}\sum_{u_m=0}^{\infty}\varphi_1(u_1,T_{2m})\varphi_m(u_m,T_{2m})\times$$

$$\times\ \mathrm{P}(\max\{0,u_1\}=x_1,\max\{0,w_m+u_m-l_m'\}=x_m,\min\{u_1,0\}=y_1,\min\{w_m+u_m,l_m'\}=y_m)+$$

$$+\sum_{w_1=1}^{\infty}\sum_{w_m=0}^{\infty}\sum_{g_1=0}^{l_1}\sum_{g_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)};w_1;w_m;g_1;g_m)\sum_{u_1=0}^{\infty}\sum_{u_m=0}^{\infty}\varphi_1(u_1,T_{2m})\varphi_m(u_m,T_{2m})\times$$

$$\times\ \mathrm{P}(\max\{0,w_1+u_1\}=x_1,\max\{0,w_m+u_m-l_m'\}=x_m,\min\{w_1+u_1;0\}=y_1,$$

$$\min\{w_m+u_m,l_m'\}=y_m)=0.$$

В случае $x_1 = 0$, $x_m \in \mathrm{X}$, $y_1 \in \mathrm{Y}_1$, $y_m \in \mathrm{Y}_m$ итоговое равенство нулю получается вследствие того, что при $x_1 = 0$ в первом слагаемом нарушается условие $\max\{0,u_1\}=x_1$, так как $u_1 > 0$, а во втором слагаемом нарушается условие $\max\{0,w_1+u_1\}=x_1$, так как здесь $w_1 > 0$.

При x_1, $x_m \in \mathrm{X}$, $y_1 \in \mathrm{Y}_1$, $y_m=\overline{l_m'+1,l_m}$ равенство $Q_{i+1}(\Gamma^{(1)};x_1;x_m;y_1;y_m)=0$ следует из того, что в обоих слагаемых не выполняется условие $\min\{w_m+u_m,l_m'\}=y_m$. При x_1, $x_m \in \mathrm{X}$, $y_1=\overline{1,l_1}$, $y_m \in \mathrm{Y}_m$ равенство нулю получается вследствие нарушения в первом слагаемом условия $\min\{u_1,0\}=y_1$, а во втором слагаемом условия $\min\{w_1+u_1,0\}=y_1$.

Для ситуации $x_1 \in \mathrm{X}$, $x_m \in \mathrm{X} \setminus \{0\}$, $y_m=\overline{0,l_m'-1}$ рассмотрим два возможных варианта:

a) $w_m + u_m < l'_m$ равенство $Q_{i+1}(\Gamma^{(1)};x_1;x_m;y_1;y_m)=0$ следует из того, что для обоих слагаемых условие $\max\{0,w_m+u_m-l_m'\}=x_m$ невыполнимо при $x_m \in$ $\in \mathrm{X} \setminus \{0\}$;

b) $w_m + u_m \ge l'_m$ к равенству нулю приводит не выполнение и в первом, и во втором слагаемом условия $\min\{w_m+u_m,l_m'\}=y_m$ при $y_m=\overline{0,l_m'-1}$.

8. Контрольные задания

1. Перечислить фундаментальные положения кибернетического подхода к построению и анализу математических моделей статистически устойчивых экспериментов с управлением.

2. Описать схему управляющей системы, перечислить блоки, которыми она представлена в случае a) циклической, b) приоритетной системы.

3. Определить, что является информацией, координатами и функцией управляющей системы в случае a) циклической, b) приоритетной системы.

4. Сформулировать, что является управлением в случае циклической системы, каков физический смысл вектора $b = (T_1, T_2, \ldots, T_{2m})$.

5. Определить, какие стратегии обслуживания $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$ называются экстремальными.

6. Что представляет собой нелокальное описание выходного потока по j-му направлению a) в случае циклической системы, b) в случае приоритетной системы.

7. Записать общий вид переходных вероятностей для марковской цепи в случае a) циклической, b) приоритетной системы.

8. Доказать для очереди по потоку в случае приоритетной системы соотношение (14) на с. 21.

9. Доказать для последовательности $\{(\Gamma_i, æ_{1,i}, \bar{\xi}_{1,i-1}); i \geq 0\}$ Утверждение 1 на с. 25.

10. Доказать Лемму 4 для случаев:

   a) $(\Gamma^{(s)}, x_1, x_m, y_1, y_m)$, $\Gamma^{(s)} \in \Gamma'$, $x_1, x_m \in X$, $y_1 = \overline{1, l_1}$, $y_m \in Y_m$;
   b) $(\Gamma^{(s)}, x_1, x_m, y_1, y_m)$, $\Gamma^{(s)} \in \Gamma'$, $x_1, x_m \in X$, $y_1 \in Y_1$, $y_m = \overline{1, l_m}$;
   c) $(\Gamma^{(2)}, x_1, x_m, y_1, y_m)$, $x_1 \in X \setminus \{0\}$, $x_m \in X$, $y_1 = \overline{0, l_1 - 1}$, $y_m \in Y_m$;
   d) $(\Gamma^{(2)}, x_1, x_m, 0, y_m)$, $x_1, x_m \in X$, $y_m \in Y_m$;
   e) $(\Gamma^{(3)}, x_1, x_m, y_1, y_m)$, $x_1, x_m \in X$, $y_1 = \overline{l_1' + 1, l_1}$, $y_m \in Y_m$;
   f) $(\Gamma^{(3)}, x_1, x_m, y_1, y_m)$, $x_1, x_m \in X$, $y_1 \in Y_1$, $y_m = \overline{1, l_m}$;
   g) $(\Gamma^{(2m)}, x_1, x_m, y_1, y_m)$, $x_1 \in X, x_m \in X \setminus \{0\}$, $y_1 \in Y_1$, $y_m = \overline{0, l_m'' - 1}$;
   h) $(\Gamma^{(2m+1)}, 0, x_m, y_1, y_m)$, $x_m \in X \setminus \{0\}$, $y_1 \in Y_1$, $y_m = \overline{l_m'' + 1, l_m - 1}$.

Литература

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания – 3-е изд., испр. и доп. — М.: КомКнига, 2005. — 400 с.

2. Федоткин М.А. Процессы обслуживания и управляющие системы // Математические вопросы кибернетики.— М.: Наука, 1996. — Вып. 6 — С. 51–70.

3. Федоткин М.А. Нелокальный способ задания управляемых случайных процессов // Математические вопросы кибернетики. — М.: Наука, 1998. — Вып. 7. — С. 333–344.

4. Ляпунов А.А., Яблонский С.В. Теоретические проблемы кибернетики // Проблемы кибернетики. — М.: Физматгиз, 1963. — С. 5–22.

5. Боровков А.А. Асимптотические методы в теории массового обслуживания — М.:Наука, 1980. — 382 с.

6. Пройдакова Е.В., Федоткин М.А. Нелокальное описание выходных потоков в системе массового обслуживания с приоритетным направлением; Нижегор. ун-т. — Нижний Новгород, 2006. — 62 с. — Деп. в ВИНИТИ 21.03.06 № 293–В2006.

Екатерина Вадимовна **Пройдакова**

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.