МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Национальный исследовательский университет

Е.Л. Панкратов

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией радиофизического факультета для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 010800 «Радиофизика»

Нижний Новгород
2012

УДК 517.958 (075)
ББК В311
П-16

П-16 ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ: Автор: Панкратов Е.Л. учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. – 51 с.

Рецензент: научная степень, ученое звание **И.О. ФамилияРецензента**

Целью данной дисциплины является ознакомление студентов с современными методами решения дифференциальных и интегральных уравнений математической физики, описывающих физические процессы, протекающие в нелинейных средах с распределенными в пространстве и/или времени параметрами.

Для студентов старших курсов и магистратуры, специализирующихся по направлению 010800 “Радиофизика”, а также аспирантов специальности 01.04.03 “Радиофизика”.

Ответственные за выпуск:
председатель методической комиссии радиофизического факультета ННГУ,
к.ф.-м.н., доцент **Н.Д. Миловский**,
зам. председатель методической комиссии радиофизического факультета ННГУ,
д.ф.-м.н., профессор **Е.З. Грибова**

УДК 517.958 (075)
ББК В311

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время имеется большое количество технических приложений, для которых необходимо проводить моделирование масопереноса, теплопереноса, распространения электромагнитных и акустических волн. В рамках проведения такого моделирования необходимо решать как линейные, так и нелинейные уравнения дифференциальные и интегральные уравнения математической физики с распределенными в пространстве и/или времени коэффициентами. Необходимость решения таких уравнений возникает при моделировании технологических процессов производства устройств твердотельной электроники (диффузия примеси и теплоперенос при нестационарном отжиге, диффузия примеси в многослойных структурах, изменение концентрации радиационных дефектов при постимплантационном отжиге и т.д.) [1-7]; теплоперенос в многослойных строительных конструкциях [8,9]; акустические волны (в многослойных строительных конструкциях) [10,11]; электромагнитные волны (в многослойных оптических структурах) [12-14] и т.д.

Раздел 1. Классификация дифференциальных и интегральных уравнений

1.1. *Классификация дифференциальных уравнений*

Начнем рассмотрение методов решения уравнений математической физики с введения нескольких основных понятий.

Определение 1

Уравнение, связывающее независимые переменные $x_1, x_2, \ldots, x_m$, искомую функцию независимых переменных $u(x_1,x_2,\ldots,x_m)$, заданной в некоторой области G, и частные производные искомой функции до n-го порядка включительно называется дифференциальным уравнением в частных производных n-го порядка.

Определение 2

Порядком уравнения называется порядок старшей из входящих в уравнение производной.

Определение 3

Функция $u\,(x_1,x_2,\ldots,x_m)$, обращающая уравнение в частных производных в тождество, называется решением или интегралом данного уравнения.

Определение 4

Дифференциальное уравнение в частных производных называется линейным, если оно линейно относительно искомой функции $u(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ и всех её производных. В противном случае уравнение называется нелинейным.

Пример 1

Линейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка в общем случае имеет следующий вид:

$$A_1(x_1,x_2,...,x_m)\frac{\partial u(x_1,x_2,...,x_m)}{\partial x_1}+A_2(x_1,x_2,...,x_m)\frac{\partial u(x_1,x_2,...,x_m)}{\partial x_2}+...+ \quad (1)$$

$$+A_m(x_1,x_2,...,x_m)\frac{\partial u(x_1,x_2,...,x_m)}{\partial x_m}=B_0(x_1,x_2,...,x_m)+B_1(x_1,x_2,...,x_m)\,u(x_1,x_2,...,x_m).$$

Пример 2

Линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка в общем случае имеет следующий вид

$$A_{11}(x_1,x_2,...,x_m)\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,...,x_m)}{\partial x_1^2}+A_{12}(x_1,x_2,...,x_m)\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,...,x_m)}{\partial x_1\,\partial x_2}+$$

$$+A_{22}(x_1,x_2,...,x_m)\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,...,x_m)}{\partial x_{12}^2}+...+A_{m-1m-1}(x_1,x_2,...,x_m)\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,...,x_m)}{\partial x_{m-1}^2}+$$

$$+A_{m-1m}(x_1,x_2,...,x_m)\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,...,x_m)}{\partial x_{m-1}\,\partial x_m}+A_{mm}(x_1,x_2,...,x_m)\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,...,x_m)}{\partial x_{mm}^2}= \quad (2)$$

$$=B_0(x_1,x_2,...,x_m)+B_1(x_1,x_2,...,x_m)u(x_1,x_2,...,x_m)+B_2(x_1,x_2,...,x_m)\times$$

$$\times\frac{\partial u(x_1,x_2,...,x_m)}{\partial x_1}+...+B_{m+1}(x_1,x_2,...,x_m)\frac{\partial u(x_1,x_2,...,x_m)}{\partial x_m}.$$

Определение 5

Если коэффициенты $B_i(x_1,x_2,\dots,x_m)$ равны нулю, уравнения (1), (2) и аналогичные им уравнения более высокого порядка называются однородными. В противном случае данные уравнения называются неоднородным.

Для описания физических процессов наиболее часто используются уравнения в частных второго порядка. Данные уравнения, также как и уравнения первого порядка, могут быть классифицированы как “линейные” и “нелинейные”, “однородные” и “неоднородные”. Существует также ещё одна классификация уравнений второго порядка. Наиболее просто она может быть проиллюстрирована с помощью линейного относительно старших производных уравнения для функций двух переменных $u(x,t)$. Такое уравнение может быть представлено в следующем общем виде

$$A_{xx}(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+2A_{xt}(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x\partial t}+A_{tt}(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=$$

$$=B\left(x,t,u(x,t),\frac{\partial u(x,t)}{\partial x},\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right). \quad (3)$$

Определение 6

Уравнение (3) называется:

(i) гиперболическим, если $A_{xx}A_{tt}-A_{xt}^2<0$ (данное уравнение наиболее часто используется для описания волновых процессов);

(ii) параболическим, если $A_{xx}A_{tt}-A_{xt}^2=0$ (данное уравнение наиболее часто используется для описания теплопереноса и диффузии вещества);

(iii) эллиптическим, если $A_{xx}A_{tt}-A_{xt}^2>0$ (используется для описания стационарных процессов).

С помощью замены переменных данные уравнения можно преобразовать к следующим каноническим формам

канонические формы гиперболических уравнений

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x\partial t}=U\left(x,t,u(x,t),\frac{\partial u(x,t)}{\partial x},\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right); \quad (3а)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=U\left(x,t,u(x,t),\frac{\partial u(x,t)}{\partial x},\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right); \quad (3б)$$

каноническая форма параболического уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=U\left(x,t,u(x,t),\frac{\partial u(x,t)}{\partial x},\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right); \quad (3в)$$

каноническая форма эллиптического уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=U\left(x,t,u(x,t),\frac{\partial u(x,t)}{\partial x},\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right). \quad (3г)$$

1.2. *Классификация краевых условий для уравнений второго порядка*

Рассмотрим функцию двух переменных $u(x,t)$ в некоторой области $(x,t)\in G$: $0\le x\le L$, $0\le t\le \Theta$.

Определение 7

Совокупность начального и граничного условий называется краевыми условиями. Начальное условие называется временным краевым условием, а граничное условие называется пространственным краевым условием.

Начальное условие

Начальное условие определяется заданием распределения искомой функции $u(x,t)$ и ее производной до m-1 порядка (m – порядок уравнения, решением которого является искомая функция $u(x,t)$) внутри области G в начальный момент времени, т.е.

$$u(x,0)=\chi_0(x),\ \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\chi_1(t),\ \ldots,\ \left.\frac{\partial^{m-1}u(x,t)}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=0}=\chi_{m-1}(t). \qquad (4)$$

Существуют несколько видов граничных условий для искомой функции.

Граничное условие первого рода (задача Дирихле)

Граничное условие первого рода (задача Дирихле) состоит в задании на границах области G искомой функциии $u(x,t)$ в любой момент времени, т.е.

$$u(0,t)=\varphi_1(0,t),\ u(L,t)=\varphi_2(L,t). \qquad (4a)$$

Такие граничные условия могут быть реализованы при искусственном поддержании постоянной концентрации легирующей примеси или температуры, а также особыми условиями массо- или теплообмена между границей области G и окружающим пространством.

Граничное условие второго рода (задача Неймана)

Граничное условие второго рода (задача Неймана) состоит в задании на границе области G плотности потока тепла, частиц, … При этом поток пропорционален нормальной производной искомой функциии $u(x,t)$

$$-\lambda\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}\right|_{x=0}=\psi_1(t),\ -\lambda\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}\right|_{x=L}=\psi_2(t). \qquad (4б)$$

В данном соотношении нормальная производная $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial n}$ искомой функции $u(x,t)$, имеющая смысл концентрации вещества или температуры, после умножения на коэффициент λ, имеющий смысл соответственно коэффициентов диффузии или теплопроводности, является потоком соответственно вещества или тепла через поверхность G. Такие граничные условия используются при теплообмене во время нагревания тела в высокотемпературных печах, где передача тепла происходит при помощи излучения по закону Стефана-Больцмана, когда температура тела значительно меньше температуры излучающих поверхностей. Второй пример реализации граничных условий второго рода – протекание частиц через границу области G с заданным потоком.

Граничное условие третьего рода (задача Ньютона)

Обычно граничные условия третьего рода характеризуют конвективный теплообмен между поверхностью тела и окружающей средой в процессе нагревания и охлаждения тела. Данный закон достаточно сложен, но в упрощенном виде может быть принят в виде закона Ньютона. В рамках данного закона поток тепла через поверхность тела пропорционален разности температур данного тела и окружающей среды, т.е.

$$-\lambda \frac{\partial u(x,t)}{\partial n}\bigg|_{x=0} = \alpha\left[u(0,t) - T_L(t)\right],\ -\lambda \frac{\partial u(x,t)}{\partial n}\bigg|_{x=L} = \alpha\left[u(L,t) - T_R(t)\right]. \qquad (4c)$$

В данном соотношении параметр α имеет смысл коэффициента теплообмена. Частным случаем третьей краевой задачи является закон Стефана-Больцмана. В рамках данного закона тепловой поток через границу от температуры пропорционален разности четвёртых степеней температур тела и окружающей среды.

Граничное условие четвертого рода

Граничное условие четвёртого рода соответствует массо- и теплообмену поверхности тела с окружающей средой (например, с другим телом). При этом обычно считаетя, что концентрация вещества или температура (в зависимости от рассматриваемой с физической точки зрения ситуации), а также поток вещества или тепла сохраняются с точностью до известного множителя при переходе через границу раздела, т.е.

$$k(t)\, u_1(x,t)\big|_{S_1} = u_2(x,t)\big|_{S_2},\ -D_1 \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial n}\bigg|_{S_1} = -D_2 \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial n}\bigg|_{S_2}. \qquad (4г)$$

1.3. Переход от дифференциальной формы уравнений к интегральной

Дифференциальное уравнение может быть преобразовано к интегральному. Рассмотрим два способа такого преобразования. В качестве примера рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$a_2(x)\frac{d^2 y(x)}{d x^2} + a_1(x)\frac{d\, y(x)}{d\, x} + a_0(x) y(x) = b(x), \qquad (5)$$

где $y(x)$ – искомая функция, $a_i(x)$ и $b(x)$ – известные функции независимой переменной x. В рамках первого метода перехода от дифференциального уравнения к интегральному сделаем в уравнении (5) следующую замену переменных: $z(x) = \frac{d^2 y(x)}{d x^2}$ [15]. Тогда производная $\frac{d\, y(x)}{d\, x}$ является интегралом от новой функции $z(x)$, т.е. $\frac{d\, y(x)}{d\, x} = \int_0^x z(v)\, d\, v + C_1$, где C_1 – постоянная интегрирования. Искомая функция $y(x)$ является двукратным интегралом от функции $z(x)$, т.е.

$y(x)=\int\limits_0^x\int\limits_0^v z(u)\,du\,dv + C_1x + C_2$, где C_2 – вторая постоянная интегрирования. С помощью интегрирования по частям [16] последнее соотношение можно свести к однократному интегралу: $y(x)=\int\limits_0^x (x-v)z(v)\,dv + C_1x + C_2$. После проведения такой замены переменных уравнение (5) преобразуется к следующему виду

$$a_2(x)z(x)+a_1(x)\left[\int\limits_0^x z(v)\,dv + C_1\right]+a_0(x)\left[\int\limits_0^x (x-v)z(v)\,dv + C_1x + C_2\right]=b(x). \quad (5a)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются с помощью наложенных на решение условий. Уравнение (5*a*) является интегральным уравнением относительно старшей производной искомой функции. После определения функции $z(x)$ ее необходимо проинтегрировать необходимое число раз (в данном случае – два раза) для определения исходной искомой функции $y(x)$.

В рамках второго метода перехода от дифференциальной формы уравнения к интегральной проинтегрируем правую и левую части уравнения (5) по независимой переменной x. Тогда уравнение (5) преобразуется к следующей форме

$$\int\limits_0^x a_2(v)\frac{d^2y(v)}{dv^2}dv + \int\limits_0^x a_1(v)\frac{dy(v)}{dv}dv + \int\limits_0^x a_0(v)y(v)\,dv = \int\limits_0^x b(v)\,dv + C_1.$$

Первые два слагаемых уравнения (5*б*) могут быть преобразованы к более простому виду использованием интегрирования по частям, т.е.

$$a_2(x)\frac{dy(x)}{dx} - \int\limits_0^x \frac{da_2(v)}{dv}\frac{dy(v)}{dv}dv + a_1(x)y(x) - \int\limits_0^x y(v)\frac{da_1(v)}{dv}dv +$$

$$+\int\limits_0^x a_0(v)y(v)\,dv = \int\limits_0^x b(v)\,dv + C_1.$$

Повторное применение интегрирования по частям во втором слагаемом позволяет преобразовать интегро-дифференциальное уравнение в интегральное

$$a_2(x)\frac{dy(x)}{dx} - \frac{da_2(x)}{dx}y(x) + \int\limits_0^x \frac{d^2a_2(v)}{dv^2}y(v)\,dv + a_1(x)y(x) - \int\limits_0^x y(v)\frac{da_1(v)}{dv}dv +$$

$$+\int\limits_0^x a_0(v)y(v)\,dv = \int\limits_0^x b(v)\,dv + C_1.$$

Или, после приведения подобных членов

$$a_2(x)\frac{dy(x)}{dx} + \left[a_1(x) - \frac{da_2(x)}{dx}\right]y(x) + \int\limits_0^x \left[\frac{d^2a_2(v)}{dv^2} - \frac{da_1(v)}{dv} + a_0(v)\right]y(v)\,dv =$$

$$= \int\limits_0^x b(v)\,dv + C_1.$$

Повторное интегрирование последнего соотношения является предпоследним шагом в преобразовании его из интегро-дифференциальной формы к интегральной, т.е.

$$\int_0^x a_2(v)\frac{d\,y(v)}{d\,v}d\,v+\int_0^x\left[a_1(v)-\frac{d\,a_2(v)}{d\,v}\right]y(v)d\,v+\int_0^x\left[\frac{d^2a_2(v)}{d\,v^2}-\frac{d\,a_1(v)}{d\,v}+a_0(v)\right]\times$$

$$\times(x-v)y(v)d\,v=\int_0^x(x-v)\,b(v)\,d\,v+C_1x+C_2\,.$$

Применение интегрирования по частям к первому слагаемому и приведение подобных членов в последнем уравнении позволяет получить второй интегральный аналог уравнения (5)

$$a_2(x)y(x)+\int_0^x\left\{a_1(v)-2\frac{d\,a_2(v)}{d\,v}+(x-v)\left[\frac{d^2a_2(v)}{d\,v^2}-\frac{d\,a_1(v)}{d\,v}+a_0(v)\right]\right\}y(v)d\,v=$$

$$=\int_0^x(x-v)b(v)d\,v+C_1x+C_2\,. \qquad (5б)$$

Введение обозначений

$$\tilde{a}_1(v)=a_1(v)-2\frac{d\,a_2(v)}{d\,v}+(x-v)\left[\frac{d^2a_2(v)}{d\,v^2}-\frac{d\,a_1(v)}{d\,v}+a_0(v)\right],$$

$$b(x)=\int_0^x(x-v)b(v)d\,v+C_1x+C_2$$

позволяет преобразовать второй интегральный аналог уравнения (5) к окончательному виду

$$a_2(x)y(x)+\int_0^x\tilde{a}_1(v)y(v)d\,v=\tilde{b}(x). \qquad (5в)$$

1.4. *Классификация интегральных уравнений*

Существуют две основных группы интегральных уравнений: уравнения Вальтера и уравнения Фредгольма. В рамках каждой группы выделяются два рода уравнений: первый и второй. Общий вид перечисленных уравнений приведен ниже. Уравнения Вальтера соответственно первого и второго рода выглядят следующим образом:

$$\lambda\int_a^x K(x,t)y(t)d\,t=f(x), \qquad (6а)$$

$$y(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,t)y(t)d\,t\,, \qquad (6б)$$

где $y(x)$ – искомая функция, $f(x,t)$ и $K(x,t)$ – известные функции, вторая из которых называется ядром интегрального уравнения.

Уравнения Фредгольма соответственно первого и второго рода имеют вид

$$\int_a^b K(x,t)\,y(t)\,dt = f(x), \qquad (7a)$$

$$y(x) - \int_a^b K(x,t)\,y(t)\,dt = f(x). \qquad (7б)$$

Если $f(x) = 0$, уравнения (6) и (7) называются однородными. В противном случае - неоднородными.

Раздел 2. Решение дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

Из дифференциальных уравнений в частных производных наиболее просто решаются уравнения первого порядка. Рассмотрим методы их решения.

2.1. *Однородные уравнения*

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка, т.е.

$$A_1(x_1,x_2,...,x_m)\frac{\partial u(x_1,x_2,...,x_m)}{\partial x_1}+A_2(x_1,x_2,...,x_m)\frac{\partial u(x_1,x_2,...,x_m)}{\partial x_2}+...+$$

$$+A_m(x_1,x_2,...,x_m)\frac{\partial u(x_1,x_2,...,x_m)}{\partial x_m}=0. \qquad (1a)$$

Составим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений [17]

$$\frac{dx_1}{A_1(x_1,x_2,...,x_m)}=\frac{dx_2}{A_2(x_1,x_2,...,x_m)}=...=\frac{dx_m}{A_m(x_1,x_2,...,x_m)}. \qquad (8)$$

Общий интеграл данной системы $u_1(x_1,x_2,\dots,x_m)=C_1$, $u_2(x_1,x_2,\dots,x_m)=C_2$, …, $u_{m\text{-}1}(x_1,x_2,\dots,x_m)=C_{m\text{-}1}$ даёт общее решение уравнения (1a) в следующем виде:

$$u(x_1,x_2,\dots,x_m)=U(u(x_1,x_2,\dots,x_m),u(x_1,x_2,\dots,x_m),\dots,u(x_1,x_2,\dots,x_m)).$$

Приведенный выше общий интеграл определяет семейство кривых, называемых характеристиками.

Пример 3

Рассмотрим уравнение

$$x\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}+y\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}+z\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}=0. \qquad (9)$$

Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}.$$

Данная система имеет два независимых интеграла

$$\varphi_1(x,y,z)=\frac{y}{x}=C_1,\ \varphi_2(x,y,z)=\frac{z}{x}=C_2,$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования. Таким образом, общим решением уравнения (3) является произвольная функция следующих аргументов

$$u(x,y,z)=F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right). \qquad (10)$$

Подставим полученное решение (10) в уравнение (9). В результате такой подстановки получаем

$$x\cdot\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}\cdot\frac{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial x}+x\cdot\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial\left(\frac{z}{x}\right)}\cdot\frac{\partial\left(\frac{z}{x}\right)}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}\cdot\frac{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial y}+\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial\left(\frac{z}{x}\right)}\cdot$$

$$\cdot y\cdot\frac{\partial\left(\frac{z}{x}\right)}{\partial y}+z\cdot\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}\cdot\frac{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial z}+z\cdot\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial\left(\frac{z}{x}\right)}\cdot\frac{\partial\left(\frac{z}{x}\right)}{\partial z}=0.$$

Вычисление в последнем соотношении частных производных, являющихся вторыми множителями в каждом из слагаемых, позволяет получить

$$-x\cdot\frac{y}{x^2}\cdot\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}-x\cdot\frac{z}{x^2}\cdot\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial\left(\frac{z}{x}\right)}+y\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}+0+0+$$

$$+z\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial\left(\frac{z}{x}\right)}=0.$$

Приведение подобных в данном соотношении показывает, что функция (10) является решением уравнения (9).

Пример 4

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}. \tag{11}$$

Соответствующее уравнению (11) обыкновенное дифференциальное уравнение в симметрической форме имеет вид

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{-1}.$$

Его общим интегралом является следующая функция

$$\varphi(x,y)=x+y=c,$$

где c – постоянная интегрирования. Таким образом, общим решением уравнения (5) является произвольная функция следующих аргументов

$$u(x,y)=F(x+y).$$

Подстановка полученного решения в исходное дифференциальное уравнение и приведение подобных членов подтверждает правильность его нахождения.

2.2. *Неоднородные уравнения*

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка, т.е. уравнение (1). В данном случае будем искать решение в неявном виде: $U(x_1,x_2,\dots,x_m,u(x_1,x_2,\dots,x_m))=0$. Решение уравнения (1) может быть определено из следующего уравнения [17]

$$A_1(x_1,...,x_m)\frac{\partial U(x_1,...,x_m,u(x_1,...,x_m))}{\partial x_1}+\frac{\partial U(x_1,...,x_m,u(x_1,...,x_m))}{\partial x_2}\times$$

$$\times A_2(x_1,...,x_m)+...+A_m(x_1,...,x_m)\frac{\partial u(x_1,...,x_m)}{\partial x_m}+\frac{\partial U(x_1,...,x_m,u(x_1,...,x_m))}{\partial u}\times$$

$$\times\left[B_1(x_1,...,x_m)+B_2(x_1,...,x_m)\,u(x_1,...,x_m)\right]=0. \quad (12)$$

Методика решения данного уравнения совпадает с методикой решения однородного уравнения. Добавляется лишь одно обыкновенное дифференциальное уравнение. Составим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\,x_1}{A_1(x_1,x_2,...,x_m)}=\frac{d\,x_2}{A_2(x_1,x_2,...,x_m)}=...=\frac{d\,x_m}{A_m(x_1,x_2,...,x_m)}=$$

$$=\frac{d\,u}{B_1(x_1,...,x_m)+B_2(x_1,...,x_m)\,u(x_1,...,x_m)}. \quad (13)$$

Далее найдём характеристики данной системы уравнений и определим решение исходного неоднородного дифференциального уравнения.

Пример 5

Рассмотрим уравнение

$$4x\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+3y\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=2u(x,y). \quad (14)$$

Преобразуем его к виду

$$4x\frac{\partial U(x,y,u(x,y))}{\partial x}+3y\frac{\partial U(x,y,u(x,y))}{\partial y}+2\frac{\partial U(x,y,u(x,y))}{\partial u}=0.$$

Далее запишем соответствующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\,x}{4x}=\frac{d\,y}{3y}=\frac{d\,u}{2u}.$$

Данная система имеет следующие интегралы

$$C_1=\frac{u(x,y)}{\sqrt{x}},\; C_2=\frac{u(x,y)}{\sqrt[3]{y}}.$$

Таким образом, решение уравнения (8) в неявной форме имеет следующий вид

$$U\left(\frac{u(x,y)}{\sqrt{x}},\frac{u(x,y)}{\sqrt[3]{y}}\right)=0.$$

2.3. *Нелинейные уравнения*

Рассмотрим нелинейное уравнение в частных производных первого порядка в случае двух независимых переменных [17]

$$U\left(x, y, u(x,y), \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right) = 0,$$

$$U\left(x, y, u(x,y), \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right) = 0, \qquad (15)$$

где $u(x,y)$ – искомая функция от x и y, U – заданная непрерывно- дифференцируемая функция своих аргументов, не линейно зависящая от искомой функции $u(x,y)$ и ее частных производных первого порядка. Часто задача интегрирования одного уравнения является более трудной, чем интегрирование системы двух совместных уравнений

$$\begin{cases} U_1\left(x, y, u(x,y), \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right) = 0 \\ U_2\left(x, y, u(x,y), \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right) = 0. \end{cases} \qquad (15a)$$

Пусть систему (15*a*) можно разрешить относительно производных $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}$, т.е.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = A(x, y, u(x,y)) \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = B(x, y, u(x,y)), \end{cases} \qquad (15б)$$

где $A(x,y,u(x,y))$ и $B(x,y,u(x,y))$ – непрерывно дифференцируемые функции. Следует заметить, что дифференцирование первого уравнения системы (15*б*) по y, а второго по x позволяет сформулировать условие совместности в следующей форме

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y}.$$

Данное условие позволяет получить

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial A(x,y,u(x,y))}{\partial y} = \dfrac{\partial A(x,y,u(x,y))}{\partial y} + \dfrac{\partial A(x,y,u(x,y))}{\partial u} B \\ \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial B(x,y,u(x,y))}{\partial x} = \dfrac{\partial B(x,y,u(x,y))}{\partial x} + \dfrac{\partial B(x,y,u(x,y))}{\partial z} A. \end{cases}$$

Два последних соотношения позволяют получить необходимое условие совместности системы (15*б*) в окончательной форме

$$\frac{\partial A(x,y,u(x,y))}{\partial y}+\frac{\partial A(x,y,u(x,y))}{\partial u}B(x,y,u(x,y))=$$

$$=\frac{\partial B(x,y,u(x,y))}{\partial x}+\frac{\partial B(x,y,u(x,y))}{\partial z}A(x,y,u(x,y)). \quad (16)$$

Решение данного типа уравнений проиллюстрируем на следующем примере.

<u>Пример 6</u>

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}=2x^2+2xu(x,y)+2xy^2-1\\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-2y.\end{cases} \quad (17)$$

Проверка условия совместности позволяет получить:

$$4xy+2x(-2y)=0+0\cdot[2x^2+2xu(x,y)+2xy^2-1].$$

Данное уравнение выполняется тождественно. По этой причине система (17) интегрируема. Первое уравнение системы (17) проинтегрируем по x, фиксируя y. Тогда получаем

$$u(x,y)=e^{x^2}\left\lfloor C(y)+\int\left(2x^2+2xy^2-1\right)e^{-x^2}dx\right\rfloor,$$

где $C(y)$ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция переменной y. Интеграл в последнем соотношении разбиением на сумму трёх интегралов, применением методов интегрирования по частям и усложнения дифференциала можно привести к следующему виду

$$\int\left(2x^2+2xy^2-1\right)e^{-x^2}dx=2\int x^2e^{-x^2}dx-2y^2e^{-x^2}-\int e^{-x^2}dx=$$

$$=-xe^{-x^2}+\int e^{-x^2}dx-2y^2e^{-x^2}-\int e^{-x^2}dx=-\left(y^2+x\right)e^{-x^2}.$$

Таким образом, можно получить

$$u(x,y)=C(y)e^{x^2}-y^2-x.$$

Выберем функцию $C(y)$ таким образом, чтобы удовлетворялось бы второе уравнение. Дифференцируя полученное из первого уравнения системы (17) решение, получаем

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\frac{dC(y)}{dy}e^{x^2}-2y.$$

Сравнение последнее уравнение со вторым уравнением системы (17) приводит к следующему результату

$$\frac{d\,C(y)}{d\,y}e^{x^2} - 2\,y = -2y\,.$$

Тогда

$$\frac{d\,C(y)}{d\,y} = 0\,,$$

т.е.

$$C(y) = const.$$

Решение системы (11) в окончательной форме имеет вид

$$u(x,y) = const \cdot e^{x^2} - y^2 - x\,.$$

Раздел 3. Решение дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

3.1. *Метод разделения переменных*

3.1.1. Линейное однородное параболическое уравнение

Рассмотрим линейное однородное параболическое уравнение

$$c\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]. \tag{18}$$

Физические трактовки решения данного уравнения - концентрация диффундирующего вещества или температура, а уравнение (18) в зависимости от физической трактовки решения называется уравнением диффузии или теплопроводности. Коэффициент c имеет смысл соответственно коэффициента пористости (отношение объёма пор в материале к общему объёму материала) или теплоёмкости, а коэффициент λ имеет смысл соответственно коэффициента диффузии или коэффициента теплопроводности. Отношение коэффициента теплопроводности и теплоёмкости λ / c называется коэффициентом температуропроводности. Если коэффициенты λ и c постоянны (а именно такой случай мы и будем пока рассматривать), тогда уравнение (18) примет следующий вид

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}. \tag{18a}$$

В данном уравнении введено обозначение $D=\lambda / c$. Дополним уравнение (18*a*) следующими граничными и начальным условиями

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L}=0,\ u(x,0)=\chi(x).$$

Будем искать решение уравнения (18*a*) в виде произведения двух множителей, один из которых зависит только от пространственной переменной x, другой – только от времени t, т.е. $u(x,t)=A(x)\,B(t)$ [18]. Подставим предлагаемую форму решения в уравнение (18*a*)

$$A(x)\frac{\partial B(t)}{\partial t}=D\,B(t)\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2}.$$

Далее перенесём в одну часть уравнения все множители, зависящие от одной переменной, в другую часть уравнения - все множители, зависящие от другой переменной, т.е.

$$\frac{1}{B(t)}\frac{d\,B(t)}{d\,t}=\frac{D}{A(x)}\frac{d^2 A(x)}{d\,x^2}.$$

Последнее равенство может выполняться только в том случае, когда его правая и левая части равны неопределённой пока постоянной величине

$$\frac{1}{B(t)}\frac{d\,B(t)}{d\,t}=\frac{D}{A(x)}\frac{d^2 A(x)}{d\,x^2}=\gamma\,.$$

Тогда получаем систему уравнений для функций $A(x)$ и $B(t)$

$$\frac{1}{B(t)}\frac{d\,B(t)}{d\,t}=\gamma\,,\ \frac{D}{A(x)}\frac{d^2 A(x)}{d\,x^2}=\gamma\,. \tag{19}$$

Решим первое уравнение системы (19) методом разделения переменных [16,17]. Для использования данного метода умножим левую и правую часть данного уравнения на dt, что приводит данное соотношение к следующему виду

$$\frac{d\,B(t)}{B(t)}=\gamma\,d\,t\,.$$

Интегрирование левой и правой части данного уравнения с использованием таблицы интегралов (см., например, [16,17]) позволяет получить следующее решение первого уравнения системы (19)

$$ln[B(t)]=\gamma t+C_1.$$

Потенцирование данного соотношения дает функцию $B(t)$ в явном виде

$$B(t)=C_1 e^{\gamma t}.$$

Постоянная γ из условия физической реализуемости решения должна быть выбрана отрицательной, т.е. $\gamma=-|\gamma|$. В противном случае решение уравнения (18*a*) будет неограниченно возрастать во времени. Второе уравнение системы (19) может быть преобразовано к виду

$$\frac{d^2 A(x)}{d\,x^2}=\frac{\gamma}{D}A(x),$$

что эквивалентно следующему уравнению

$$\frac{d^2 A(x)}{d\,x^2}+\frac{|\gamma|}{D}A(x)=0\,.$$

Далее в рамках метода Эйлера подстановка $A\,(x) = C\,e^{\lambda\,x}$ позволяет получить следующее уравнение для параметра λ

$$\lambda^2+|\gamma|/D=0.$$

Тогда

$$\lambda=\pm i\,x\sqrt{|\gamma|/D}\,,$$

где $i=\sqrt{-1}$.

С учётом последних соотношений функция $A\,(x)$ может быть представлена в двух эквивалентных формах

$$A(x)=C_2\exp\left(i\,x\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\right)+C_3\exp\left(-i\,x\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\right)\text{ и }A(x)=C_4\cos\left(x\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\right)+C_5\sin\left(x\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\right).$$

Вторая форма является более предпочтительной, т.к. с её помощью определение постоянных интегрирования является более удобной. Решение уравнения (18*a*) в окончательной форме имеет следующий вид

$$u(x,t)=\left[C_6\cos\left(x\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\right)+C_7\sin\left(x\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\right)\right]e^{-|\gamma|\,t}, \tag{20}$$

где $C_6=C_1C_4$, $C_7=C_1C_5$. Далее определим неизвестные пока постоянные величины C_6, C_7 и γ. Для этого найдём частную производную по переменной x от функции (20)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=\left[-C_6\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\sin\left(x\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\right)+C_7\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\cos\left(x\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\right)\right]e^{-|\gamma|\,t}.$$

Подстановка граничных значений переменной x приводит к следующим результатам

при $x=0$: $$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=C_7\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\cos\left(x\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\right)e^{-|\gamma|\,t}$$

при $x=L$: $$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L}=\left[-C_6\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\sin\left(L\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\right)+C_7\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\cos\left(L\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\right)\right]e^{-|\gamma|\,t}.$$

Равенство нулю производной $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ на границах рассматриваемой области позволяет получить из первого уравнения данной системы, что оно может удовлетворяться только при равенстве нулю постоянной интегрирования C_7. Остальные множители производной или не равны нулю, или равны нулю только в некоторых точках. Равенство нулю постоянной C_7 приводит второе уравнение последней системы к следующему виду

при $x=L$: $$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L}=-C_6\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\sin\left(L\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\right)e^{-|\gamma|\,t}.$$

Данное соотношение может быть равно нулю или при $\sin\left(L\sqrt{|\gamma|/D}\right)=0$, или при $C_7=0$. Однако второе равенство приводит к нулевому решению уравнения (18*a*), что интереса не представляет. Решение уравнения $\sin\left(L\sqrt{|\gamma|/D}\right)=0$ позволяет получить: $|\gamma|=D\,\pi^2n^2/L^2$, $n=0$, 1, 2, … Таким образом, уравнение (18*a*) имеет бесконечное число решений. Числа $\pi n/L$ называются <u>собственными числами.</u> Соответствующие им ненулевые (нетривиальные) решения называются <u>собственными функциями</u>. Задача на нахождение собственных чисел и собственных решений называется задачей Штурма-Лиувиля. Формально составим ряд из этих решений

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}C_{n6}\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)e^{-\frac{\pi^2 n^2}{L^2}Dt}. \qquad (21)$$

Для определения постоянных интегрирования C_{6n} воспользуемся начальным распределением. Представим начальное распределение $\chi(x)$ в виде ряда Фурье по собственным функциям рассматриваемой краевой задачи $f_n(x)=\cos(\pi nx/L)$, т.е.

$$\chi(x)=\frac{1}{L}\int_0^L\chi(x)dx+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^L\chi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx. \qquad (22)$$

Далее в соотношении (21) выберем нулевое значение переменной t и приравняем полученный ряд ряду (22)

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_{n6}\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)=\frac{1}{L}\int_0^L\chi(x)dx+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^L\chi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx.$$

Путём сравнения членов ряда при одинаковых значениях n получаем

$$C_{06}=\frac{1}{L}\int_0^L\chi(x)dx;\ C_{n6}=\frac{2}{L}\int_0^L\chi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx,\ n\ge 1.$$

В окончательной форме решение уравнения (18*а*) имеет следующий вид

$$u(x,t)=\frac{1}{L}\int_0^L\chi(x)dx+\frac{2}{L}\sum_{n=0}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)e^{-\frac{\pi^2 n^2}{L^2}Dt}\int_0^L\chi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx.$$

Описанный метод называется метод разделения переменных Фурье.

3.1.2. Линейное неоднородное параболическое уравнение

Рассмотрим линейное неоднородное параболическое уравнение

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+g(x,t). \qquad (18б)$$

Функция $g(x,t)$ в данном уравнении описывает источник поступающих в область G вещества или теплоты. Дополним уравнение (18*б*) следующими граничными и начальным условиями

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L}=0,\ u(x,0)=\chi(x).$$

Будем искать решение уравнения (18*б*) в виде ряда, по собственным функциям однородной краевой задачи $f_n(x)=\cos(\pi nx/L)$ [18], т.е.

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}h_n(t)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right), \qquad (23)$$

где $h_n(t)$ – неизвестная пока функция переменной t. Представим функцию $g(x,t)$, а также начальное распределение $\chi(x)$ в виде рядов Фурье по собственным функциям однородной краевой задачи

$$g(x,t)=\frac{1}{L}\int_0^L g(x,t)dx+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi nx}{L}\right)\int_0^L g(x,t)\cos\left(\frac{\pi nx}{L}\right)dx, \qquad (24)$$

$$\chi(x)=\frac{1}{L}\int_0^L \chi(x)dx+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi nx}{L}\right)\int_0^L \chi(x)\cos\left(\frac{\pi nx}{L}\right)dx. \qquad (25)$$

Подстановка ряда (24) в уравнение (18*б*) позволяет получить уравнение для неизвестной функции $h_n(t)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial h_n(t)}{\partial t}\cos\left(\frac{\pi nx}{L}\right)=-D\frac{\pi^2}{L^2}\sum_{n=0}^{\infty}n^2h_n(t)\cos\left(\frac{\pi nx}{L}\right)+$$

$$+\frac{1}{L}\int_0^L g(x,t)\,dx+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi nx}{L}\right)\int_0^L g(x,t)\cos\left(\frac{\pi nx}{L}\right)dx.$$

Далее в полученном уравнении группируем слагаемые при одинаковых значениях n и приравниваем их. Тогда

$$\frac{\partial h_0(t)}{\partial t}=\frac{1}{L}\int_0^L g(x,t)\,dx,\ \frac{\partial h_n(t)}{\partial t}=-D\frac{\pi^2n^2}{L^2}h_n(t)+\frac{2}{L}\int_0^L g(x,t)\cos\left(\frac{\pi nx}{L}\right)dx.$$

Решениями данных уравнений являются следующие функции

$$h_0(t)=\frac{1}{L}\int_0^t\int_0^L g(x,\tau)\,d\tau+C_{06},\ h_n(t)=\frac{2}{L}\int_0^t e^{\frac{\pi^2n^2}{L^2}D\tau}\int_0^L g(x,\tau)\cos\left(\frac{\pi nx}{L}\right)dx\,d\tau+C_{n6},$$

где C_{06} и C_{n6} – постоянные интегрирования. Подстановка полученных соотношений в предлагаемую форму решения (23) уравнения (18*б*) приводит к следующему результату

$$u(x,t)=C_{06}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{L}\int_0^t e^{\frac{\pi^2n^2}{L^2}D\tau}\int_0^L g(x,\tau)\cos\left(\frac{\pi nx}{L}\right)dx\,d\tau+C_{n6}\right]\cos\left(\frac{\pi nx}{L}\right)+$$

$$+\frac{1}{L}\int_0^t\int_0^L g(x,\tau)\,d\tau. \qquad (26)$$

Постоянные интегрирования C_{06} и C_{n6} определим с помощью начального условия. Для этого в соотношение (26) подставим нулевое значение переменной t и приравняем полученный результат разложению начального условия $\chi(x)$ (25), т.е.

$$\frac{1}{L}\int_0^0\int_0^L g(x,\tau)\,d\tau+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{L}\int_0^0 e^{\frac{\pi^2n^2}{L^2}D\tau}\int_0^L g(x,\tau)\cos\left(\frac{\pi nx}{L}\right)dx\,d\tau+C_{n6}\right]\cos\left(\frac{\pi nx}{L}\right)+$$

$$+C_{06}=\frac{1}{L}\int_0^L \chi(x)dx+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi nx}{L}\right)\int_0^L \chi(x)\cos\left(\frac{\pi nx}{L}\right)dx.$$

Тогда

$$C_{06}=\frac{1}{L}\int_0^L \chi(x)dx,\; C_{n6}=\int_0^L \chi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx.$$

В окончательной форме решение уравнения (18*б*) имеет следующий вид

$$u(x,t)=\frac{1}{L}\int_0^t\int_0^L g(x,\tau)\,d\tau+\frac{1}{L}\int_0^L \chi(x)dx+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{L}\int_0^t e^{\frac{\pi^2 n^2}{L^2}D\tau}\int_0^L g(x,\tau)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau+\int_0^L \chi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\right]\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right).$$

3.1.3. Линейное однородное гиперболическое уравнение

Найдём решение линейного однородного гиперболического уравнения с постоянным коэффициентом

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=E\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad (27)$$

в области G: $0\le x\le L$, $0\le t<\infty$ с условиями

$$u(0,t)=0,\; u(L,t)=0,\; u(x,0)=\chi_1(x),\; \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\chi_2(t).$$

С физической точки зрения уравнение (27), имеющее название классического волнового уравнения, можно проинтерпретировать следующим образом. Пусть имеется струна, совершающая малые колебания. В данном случае функция $u(x,t)$ является компонентой вектора смещения, перпендикулярной к оси абсцисс. Коэффициент E является отношением величин натяжения струны к её плотности и имеет смысл квадрата скорости распространения колебания. Будем искать решение уравнения (27) в виде произведения двух множителей, один из которых зависит только от переменной x, другой – только от переменной t, т.е. $u(x,t)=A(x)\cdot B(t)$ [18]. Подставим предлагаемую форму решения в уравнение (27)

$$A(x)\frac{\partial^2 B(t)}{\partial t^2}=E\,B(t)\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2}.$$

Далее функции, зависящие только от переменной x, перенесём в одну часть данного уравнения, а функции, зависящие только от переменной t, перенесём в одну часть уравнения, т.е.

$$\frac{1}{B(t)}\frac{\partial^2 B(t)}{\partial t^2}=\frac{E}{A(x)}\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2}.$$

Такое равенство может быть выполнено только в том случае, когда и правая, и левая часть данного уравнения равны некоторой неопределённой пока постоянной величине γ.

$$\frac{1}{B(t)}\frac{\partial^2 B(t)}{\partial t^2}=\frac{E}{A(x)}\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2}=\gamma.$$

Для определения функций $A(x)$ и $B(t)$ необходимо решить уравнения

$$\frac{1}{B(t)}\frac{\partial^2 B(t)}{\partial t^2}=\gamma\,,\ \frac{E}{A(x)}\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2}=\gamma\,.$$

Общими решениями данных уравнений являются следующие функции

$$A(x)=C_1\cos\left(x\sqrt{\frac{\gamma}{E}}\right)+C_2\sin\left(x\sqrt{\frac{\gamma}{E}}\right),\ B(t)=C_3\cos\left(\sqrt{\gamma}\,t\right)+C_4\sin\left(\sqrt{\gamma}\,t\right),$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – постоянные интегрирования. Общим решением уравнения (27) является произведение данных функций $A(x)$ и $B(t)$

$$u(x,t)=\left[C_1\cos\left(x\sqrt{\frac{\gamma}{E}}\right)+C_2\sin\left(x\sqrt{\frac{\gamma}{E}}\right)\right]\left[C_3\cos\left(\sqrt{\gamma}\,t\right)+C_4\sin\left(\sqrt{\gamma}\,t\right)\right]. \qquad (28)$$

Далее определим постоянные интегрирования. Для этого на первом этапе приравняем нулю переменную x. Тогда

$$u(0,t)=C_1\left[C_3\cos\left(\sqrt{\gamma}\,t\right)+C_4\sin\left(\sqrt{\gamma}\,t\right)\right].$$

На границе $x=0$ искомая функция равна нулю. Это условие выполняется в тех случаях, когда C_1=0 или $C_3\cos\left(\sqrt{\gamma}\,t\right)+C_4\sin\left(\sqrt{\gamma}\,t\right)=0$. Однако второе равенство интереса не представляет, т.к. оно соответствует равенству нулю искомой функции $u(x,t)$.

Воспользуемся вторым граничным условием. Для этого подставим в соотношение (28) значение переменной $x=L$, т.е.

$$u(L,t)=C_2\sin\left(L\sqrt{\frac{\gamma}{E}}\right)\left[C_3\cos\left(\sqrt{\gamma}\,t\right)+C_4\sin\left(\sqrt{\gamma}\,t\right)\right]=0\,.$$

Это условие выполняется в тех случаях, когда или C_2=0, или $C_3\cos\left(\sqrt{\gamma}t\right)+$ $+C_4\sin\left(\sqrt{\gamma}\,t\right)=0$, или $\sin\left(L\sqrt{\gamma/E}\right)=0$. Однако, первые два равенства интереса не представляют, т.к. они соответствуют равенству нулю искомой функции u (x,t). Из последнего равенства следует, что $\gamma=\pi^2 n^2 E/L^2$, $n=0$, 1, 2, … Таким образом, рассмотренным граничным условиям удовлетворяет бесконечное число решений. Составим формально ряд из таких решений

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_{n2}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\left[C_{n3}\cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)+C_{n4}\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)\right]. \qquad (29)$$

В данном ряде достаточно найти не три семейства постоянных интегрирования C_{n2}, C_{n3} и C_{n4}, а произведения постоянных интегрирования $C_{n5}=C_{n2}C_{n3}$ и $C_{n6}=C_{n2}C_{n4}$. Для их определения воспользуемся начальными условиями. На первом этапе подставим в соотношение (29) нулевое значение переменной t и представим функцию $\chi_1(t)$ в виде ряда Фурье, т.е.

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_{n5}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right),\ \chi_1(x)=\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^L\chi_1(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,. \qquad (30)$$

Левые части последних соотношений равны друг другу. Значит, равны и правые. Тогда из этого условия получаем

$$C_{n5} = \frac{2}{L}\int_0^L \chi_1(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)d\,x\,.$$

Подставляя полученные значения постоянных интегрирования в соотношение (29), получаем

$$u(x,t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)\int_0^L \chi_1(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)d\,x +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} C_{n6}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right). \qquad (29a)$$

Далее воспользуемся вторым начальным условием. Для этого вычислим производную от искомой функции, определяемой соотношением (29*а*), по переменной *t*. Искомая производная имеет вид

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -2\sqrt{E}\,\frac{\pi}{L^2}\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)\int_0^L \chi_1(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)d\,x +$$

$$+\sqrt{E}\,\frac{\pi}{L}\sum_{n=1}^{\infty} n\,C_{n6}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right). \qquad (29б)$$

Для определения постоянных интегрирования C_{n6} подставим в соотношение (29*б*) нулевое значение переменной *t* и представим функцию $\chi_2(t)$ в виде ряда Фурье, т.е.

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \sqrt{E}\,\frac{\pi}{L}\sum_{n=1}^{\infty} n\,C_{n6}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right),$$

$$\chi_2(x) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^L \chi_2(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)d\,x\,. \qquad (31)$$

Левые части последних соотношений равны друг другу. Следовательно, равны и правые. Из этого условия определяем оставшиеся постоянные интегрирования. В окончательной форме решение уравнения (27) имеет вид

$$u(x,t) = \frac{1}{L}\int_0^L \chi_1(x)d\,x + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)\int_0^L \chi_1(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)d\,x +$$

$$+\frac{1}{\pi\sqrt{E}}\int_0^L \chi_2(x)d\,x + \frac{1}{\pi\sqrt{E}}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)\int_0^L \chi_2(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)d\,x\,.$$

Движения струны такого типа называется стоячей волной. Точки $x = mL/n$ ($m = 1, 2, \ldots, n$-1), в которых $sin(\pi n\,x/L) = 0$, в течении всего процесса остаются неподвижными и называются узлами стоячей волны $u_n(x,t)$. Точки $x = (2\,m+1)/2n$ ($m = 0, 1, \ldots, n$-1), в которых $sin(\pi n\,x/L) = \pm 1$, совершают с максимальной амплитудой, называются пучностями стоячей волны.

3.1.4. Линейное неоднородное гиперболическое уравнение

Рассмотрим линейное неоднородное гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = E\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + g(x,t) \qquad (27a)$$

в области G: $0 \le x \le L$, $0 \le t \le \Theta$ с условиями

$$u(0,t)=0,\ u(L,t)=0,\ u(x,0)=\chi_1(x),\ \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \chi_2(t).$$

Будем искать решение уравнения (27a) в виде ряда, по собственным функциям краевой задачи с однородным волновым уравнением $f_n(x)=sin(\pi nx/L)$, т.е.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right), \qquad (32)$$

где $h_n(x)$ – неизвестная пока функция. Представим функцию $g(x,t)$, а также начальные условия в виде рядов Фурье по собственным функциям краевой задачи с однородным волновым уравнением

$$g(x,t) = \frac{1}{L}\int_0^L g(x,t)\,dx + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^L g(x,t)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx, \qquad (33)$$

Подстановка рядов (32) и (33) в уравнение (27a) позволяет получить уравнение для неизвестной функции $h_n(x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2 h_n(t)}{\partial t^2}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) = -E\frac{\pi^2}{L^2}\sum_{n=0}^{\infty} n^2 h_n(t)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) +$$

$$+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^L g(x,t)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx.$$

Далее в полученном уравнении группируем слагаемые при одинаковых значениях n и приравниваем их. Тогда

$$\frac{\partial^2 h_n(t)}{\partial t^2} = -n^2 E\frac{\pi^2}{L^2}h_n(t) + \frac{2}{L}\int_0^L g(x,t)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx.$$

Решениями данных уравнений являются следующие функции

$$h_n(t) = \left[C_{n1} - \frac{2}{\pi n L}\int_0^t \cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,\tau\right)\int_0^L g(x,\tau)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau\right]\cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right) +$$

$$+\left[C_{n2} + \frac{2}{\pi n L}\int_0^t \sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,\tau\right)\int_0^L g(x,\tau)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau\right]\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right).$$

Подстановка последних соотношений в ряд (32) позволяет получить

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\left[C_{n1} - \frac{2}{\pi n L}\int_0^t \cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,\tau\right)\int_0^L g(x,\tau)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau\right]\times$$

$$\times\cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_{n2}+\frac{2}{\pi n L}\int_0^t \sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,\tau\right)\int_0^L g(x,\tau)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau\right]\times$$

$$\times\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right). \qquad (34)$$

Для определения постоянных интегрирования воспользуемся начальными условиями. На первом этапе выберем в соотношении (34) нулевое значение переменной t. После такой подстановки получаем

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\left[C_{n1}-\frac{2}{\pi n L}\int_0^0 \cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,\tau\right)\int_0^L g(x,\tau)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau\right]\times$$

$$\times\cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,0\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_{n2}+\frac{2}{\pi n L}\int_0^0 \sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,\tau\right)\int_0^L g(x,\tau)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau\right]\times$$

$$\times\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,0\right).$$

Учитывая нулевое значение ряда слагаемых в данном соотношении, запишем его в более простом виде

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_{n1}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right).$$

С другой стороны полученный ряд совпадает с рядом (30), являющимся разложением в ряд Фурье первого начального условия, т.е. функции $\chi_1(x)$. После приравнивания коэффициентов при одинаковых значениях номера n получаем

$$u(x,t)=2\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\left[\frac{1}{L}\int_0^L \chi_1(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx-\int_0^t \cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,\tau\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{\pi n L}\int_0^L g(x,\tau)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_{n2}+\frac{2}{\pi n\sqrt{E}}\int_0^t\int_0^L g(x,\tau)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\times\right.$$

$$\left.\times\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,\tau\right)d\tau\right]\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right). \qquad (34a)$$

Для использования второго начального условия необходимо определить производную по переменной t от функции (34). Данная производная имеет следующий вид

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=-\frac{2}{\pi L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^t \cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,\tau\right)\int_0^L g(x,\tau)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau\cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)\times$$

$$\times\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)-2\sqrt{E}\frac{\pi}{L}\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\left[\frac{1}{L}\int_0^L \chi_1(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx-\right.$$

$$-\frac{1}{\pi n L}\int_0^t \cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,\tau\right)\int_0^L g(x,\tau)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau\Bigg]+\frac{2}{\pi\sqrt{E}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)\times$$

$$\times\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^t \sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,\tau\right)\int_0^L g(x,\tau)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau+\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{\pi}{L}\cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)\times$$

$$\times\sqrt{E}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\left[C_{n2}+\frac{2}{\pi n\sqrt{E}}\int_0^t \sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,\tau\right)\int_0^L g(x,\tau)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau\right]. \quad (35)$$

Приравнивая переменную t к нулю, получаем

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\sqrt{E}\,\frac{\pi}{L}\sum_{n=1}^{\infty} n\,C_{n2}\,\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right).$$

Для определения последних постоянных интегрирования воспользуемся рядом (31). После приравнивания коэффициентов при одинаковых значениях номера n получаем

$$C_{n2}=\frac{2}{\pi n\sqrt{E}}\int_0^L \chi_2(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,.$$

Тогда

$$u(x,t)=\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^L \chi_1(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx-\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\times$$

$$\times\frac{2}{\pi L n}\cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)\int_0^t \cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,\tau\right)\int_0^L g(x,\tau)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau+\frac{2}{\pi\sqrt{E}}\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)\int_0^L \chi_2(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)\times$$

$$\times\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\frac{1}{n}\int_0^t\int_0^L g(x,\tau)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,\tau\right)d\tau\,.$$

3.1.5. Линейное однородное эллиптическое уравнение

Рассмотрим линейное однородное эллиптическое уравнение внутри круга радиуса R

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r}\right]+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u(r,\varphi)}{\partial\varphi^2}=0 \quad (36)$$

с граничным условием

$$u(r{=}R,\varphi)=U(\varphi),$$

где (r,φ) – полярные координаты с началом в центре круга. Полярные координаты связаны с декартовыми следующими соотношениями

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(\varphi) \\ y = r \cdot \sin(\varphi) \end{cases}; \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg(\varphi) = y/x \end{cases}.$$

Будем искать решение уравнения (36) в виде произведения двух функций

$$u(r\,\varphi) = A(r)\,B(\varphi).$$

Подстановка предлагаемой формы решения в уравнение (36) позволяет получить

$$\frac{B(\varphi)}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial A(r)}{\partial r}\right] + \frac{A(r)}{r^2}\frac{\partial^2 B(\varphi)}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Далее разделяем переменные

$$\frac{r}{A(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial A(r)}{\partial r}\right] = -\frac{1}{B(\varphi)}\frac{\partial^2 B(\varphi)}{\partial \varphi^2}$$

и приравниваем правую и левую часть уравнения неопределённому пока параметру γ. Решением полученных уравнений

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial A(r)}{\partial r}\right] - \gamma A(r) = 0, \quad \frac{\partial^2 B(\varphi)}{\partial \varphi^2} + \gamma B(\varphi) = 0. \qquad (37)$$

являются следующие функции

$$A(r) = C_1 J_0\left(\sqrt{\gamma}\frac{r}{R}\right) + C_2 N_0\left(\sqrt{\gamma}\frac{r}{R}\right), \; B(\varphi) = C_3\cos\left(\sqrt{\gamma}\,\varphi\right) + C_4\sin\left(\sqrt{\gamma}\,\varphi\right).$$

Таким образом, общее решение уравнения (37) имеет вид

$$u(r,\varphi) = \left[C_1 J_0\left(\sqrt{\gamma}\frac{r}{R}\right) + C_2 N_0\left(\sqrt{\gamma}\frac{r}{R}\right)\right]\left[C_3\cos\left(\sqrt{\gamma}\,\varphi\right) + C_4\sin\left(\sqrt{\gamma}\,\varphi\right)\right], \qquad (38)$$

где $J_0(\gamma\, r)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка, $N_0(\gamma\, r)$ – функция Бесселя второго рода нулевого порядка. Обе функции являются решением первого из пары уравнений (37), называющегося уравнением Бесселя. Рассмотрим функции Бесселя более подробно. В общем виде решение уравнение Бесселя имеет вид

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial A(r)}{\partial r}\right] + \left(r^2 - s^2\right)A(r) = 0. \qquad (39)$$

В данном уравнении (частном случае уравнения Бесселя) s – действительное число. Решениями уравнения (39) являются следующие функции [18]

1) функции Бесселя первого рода (функции Бесселя) m-го порядка

$$J_m(r) = \left(\frac{r}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(m+k+1)}\left(\frac{r}{2}\right)^{2k},$$

где $k!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k$. Соотношение для гамма-функции представимо с помощью интеграла

$$\Gamma(r)=\int_0^\infty e^{-\tau}\tau^{r-1}d\tau .$$

или предела

$$\Gamma(r)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^{r-1}}{r(r+1)(r+2)\ldots(r+n-1)}.$$

При целых положительных значениях r выполняется свойство: $\Gamma(r)=(r-1)!$ Графики функций Бесселя первого рода первых трех порядков приведены на рис. 1.

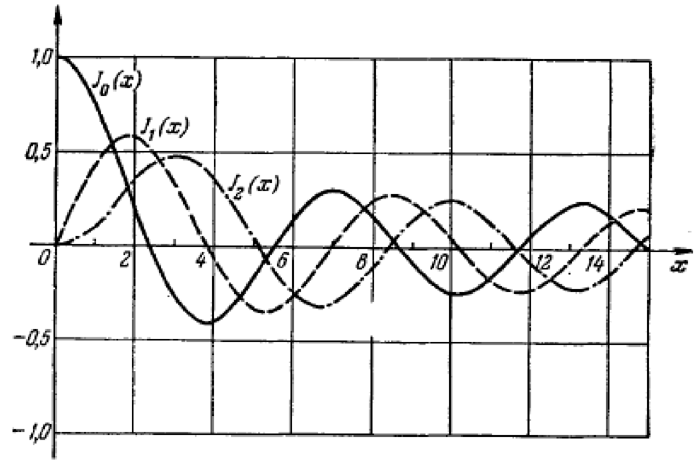

Рис. 1.

2) функции Бесселя второго рода (функции Неймана, функции Вебера) m-го порядка

$$N_m(r)=\lim_{m\to n}\frac{J_m(r)\cos(m\pi)-J_{-m}(r)}{\sin(m\pi)}.$$

Графики функций Бесселя второго рода первых двух порядков приведены на рис. 2.

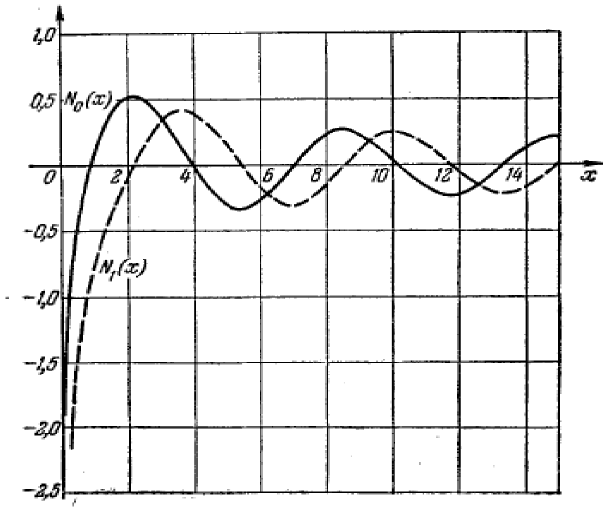

Рис. 2.

3) функции Ханкеля (Ганкеля) первого и второго рода m-го порядка

$$H_m^{(1)}(r)=J_m(r)+i\,N_m(r),\ H_m^{(2)}(r)=J_m(r)-i\,N_m(r),\ i=\sqrt{-1}\,.$$

Из рис.2 следует, что при малых значениях переменной r решение (38) является физически нереализуемым. По этой причине выберем нулевое значение постоянной интегрирования C_2. Поскольку искомая функция $u(r,\varphi)$ определяется в круге, выполняется условие периодичности $u(r,\varphi)=u(r,\varphi+2\pi)$. Данное условие позволяет получить: $\gamma=n^2$. Тогда можно записать

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}J_0\left(n\frac{r}{R}\right)\left[C_{3n}\cos(n\varphi)+C_{4n}\sin(n\varphi)\right]. \qquad (40)$$

Далее представим функцию $U(\varphi)$ в виде ряда Фурье

$$U(\varphi)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}U(\varphi)\cos(n\varphi)d\varphi+\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\varphi)\int_0^{2\pi}U(\varphi)\cos(n\varphi)d\varphi+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}U(\varphi)\sin(n\varphi)d\varphi+\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\varphi)\int_0^{2\pi}U(\varphi)\sin(n\varphi)d\varphi. \qquad (41)$$

При условии $r=R$ ряды (40) и (41) должны совпасть, что приводит к равенству соответствующих членов ряда. В окончательной форме решение уравнения (36) имеет вид

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}U(\varphi)\cos(n\varphi)d\varphi+\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(nr/R)}{J_0(n)}\cos(n\varphi)\int_0^{2\pi}U(\varphi)\cos(n\varphi)d\varphi+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}U(\varphi)\sin(n\varphi)d\varphi+\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(nr/R)}{J_0(n)}\sin(n\varphi)\int_0^{2\pi}U(\varphi)\sin(n\varphi)d\varphi.$$

3.1.6. Линейное неоднородное эллиптическое уравнение

Рассмотрим линейное неоднородное эллиптическое уравнение внутри круга радиуса R

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r}\right]+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u(r,\varphi)}{\partial\varphi^2}=g(r,\varphi) \qquad (42)$$

с граничным условием

$$u(r=R,\varphi)=U(\varphi),$$

где $g(r,\varphi)$ – известная функция. Будем искать решение уравнения (42) в виде ряда по собственным функциям однородной задачи, т.е.

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}h_n(\varphi)\,J_0\left(\frac{nr}{K}\right), \qquad (43)$$

где $h_n(\varphi)$ – неизвестная пока функция. Представим функцию $g(r,\varphi)$, а также граничное условие в виде рядов Фурье по собственным функциям краевой задачи с однородным эллиптическим уравнением

$$g(r,\varphi)=\frac{1}{R}\int_0^R r\,g(r,\varphi)\,d\,r+\frac{2}{R}\sum_{n=1}^{\infty}J_0\left(n\frac{r}{R}\right)\int_0^R r\,g(r,\varphi)J_0\left(n\frac{r}{R}\right)d\,r\,. \qquad (44)$$

Для того, что бы определить функции $h_n(\varphi)$, подставим ряды (43) и (44) в уравнение (42). Тогда после решения соответствующих уравнений получаем искомые функции

$$h_0(\varphi)=\int_0^{\varphi}(\varphi-v)\int_0^R r\,g(r,v)\,d\,r\,d\,v+C_1\varphi+C_2,$$

$$h_n(\varphi)=\left[C_1-\frac{1}{\pi\,n}\int_0^{\varphi}\sin(n\,v)\int_0^R r\,g(r,v)J_0\left(n\frac{r}{R}\right)d\,r\,d\,v\right]\cos(n\varphi)+$$

$$+\left[C_2+\frac{1}{\pi\,n}\int_0^{\varphi}\cos(n\,v)\int_0^R r\,g(r,v)J_0\left(n\frac{r}{R}\right)d\,r\,d\,v\right]\sin(n\varphi),\ n\geq 1.$$

При нахождении данных функций использованы следующие свойства функции Бесселя первого рода

$$J_{m+1}(x)=\frac{m}{x}J_m(x)-\frac{d}{d\,x}J_m(x),\ J_{m+1}(x)=\frac{2\,m}{x}J_m(x)-J_{m-1}(x).$$

Далее для определения постоянных интегрирования воспользуемся разложением граничного условия в ряд Фурье (41). После приравнивания коэффициентов при одинаковых значениях n получаем

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(\varphi)\cos(n\varphi)\,d\,\varphi-\frac{1}{\pi\,n}\int_0^{\varphi}\sin(n\,v)\int_0^R r\,g(r,v)J_0\left(n\frac{r}{R}\right)d\,r\,d\,v\right]\times$$

$$\times\cos(n\varphi)\frac{J_0(n\,r/R)}{J_0(n)}+\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\varphi)\frac{J_0(n\,r/R)}{J_0(n)}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(\varphi)\sin(n\varphi)\,d\,\varphi+\frac{1}{\pi\,n}\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^{\varphi}\cos(n\,v)\int_0^R r\,g(r,v)J_0\left(n\frac{r}{R}\right)d\,r\,d\,v\right]+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}U(\varphi)\cos(n\varphi)\,d\,\varphi+\int_0^{\varphi}(\varphi-v)\int_0^R g(r,v)\times$$

$$\times\,r\,d\,r\,d\,v+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}U(\varphi)\sin(n\varphi)\,d\,\varphi\,.$$

3.2. Метод распространяющихся волн

Рассмотрим однородное гиперболическое уравнение с постоянным коэффициентом (27) в неограниченной области $-\infty\leq x\leq\infty$ с начальными условиями

$$u(x,0)=\chi_1(x),\ \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\chi_2(t).$$

Введём новые переменные $\xi=x+\sqrt{E}\,t$ и $\eta=x-\sqrt{E}\,t$. Подставим данные переменные в (27). Тогда после однократного дифференцирования по исходным переменным x и t получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\sqrt{E}\,\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \xi}-\sqrt{E}\,\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right]=E\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \xi}+\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right].$$

Повторное дифференцирование левой и правой частей данного соотношения по переменным x и t приводит уравнение (27) к следующему виду

$$E\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}-E\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \eta\,\partial \xi}-E\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi\,\partial \eta}+E\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}=$$

$$=E\left[\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi\,\partial \eta}+\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \eta\,\partial \xi}+\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}\right].$$

Приведение подобных в данном уравнении позволяет получить уравнение (27) в новых переменных в следующем виде

$$\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi\,\partial \eta}=0. \qquad (27б)$$

Далее проинтегрируем уравнение (27*б*) по переменной ξ, что приводит к следующему результату

$$\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta}=f(\eta).$$

Интегрируя данное соотношение по переменной η при фиксированном значении переменной ξ, получаем

$$u(\xi,\eta)=\int_0^{\eta} f(v)\,dv+f_1(\xi).$$

Введём обозначение $f_2(\eta)=\int_0^{\eta} f(v)\,dv$. Тогда

$$u(\xi,\eta)=f_1(\xi)+f_2(\eta).$$

Данная функция является общим интегралом уравнения (27*б*). Тогда и функция

$$u(x,t)=f_1\left(x+\sqrt{E}\,t\right)+f_2\left(x-\sqrt{E}\,t\right) \qquad (45)$$

также является интегралом соответствующего гиперболического уравнения в исходных переменных. Для определения функций $f_1\left(x+\sqrt{E}\,t\right)$ и $f_2\left(x-\sqrt{E}\,t\right)$ воспользуемся начальными условиями. Найдём производную по переменной t от решения (45)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\sqrt{E}\,\frac{d f_1\left(x+\sqrt{E}\,t\right)}{d\left(x+\sqrt{E}\,t\right)}-\sqrt{E}\,\frac{d f_2\left(x-\sqrt{E}\,t\right)}{d\left(x-\sqrt{E}\,t\right)}.$$

Далее и в решении (39), и в его производной выберем нулевое значение переменной t, т.е.

$$\begin{cases} f_2(x) + f_2(x) = \chi_1(x) \\ \sqrt{E}\,\dfrac{d\,f_1\left(x+\sqrt{E}\,t\right)}{d\left(x+\sqrt{E}\,t\right)}\Bigg|_{t=0} - \sqrt{E}\,\dfrac{d\,f_2\left(x-\sqrt{E}\,t\right)}{d\left(x-\sqrt{E}\,t\right)}\Bigg|_{t=0} = \chi_2(x). \end{cases} \qquad (46)$$

Интегрирование второго уравнения системы (46) приводит к следующему результату

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{E}} \int_{x_0}^{x} \chi_2(v)\,d\,v + C,$$

где x_0 и C – постоянные величины. Из последнего уравнения, а также первого уравнения системы (46) можно получить

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\chi_1(x) + \frac{1}{2\sqrt{E}} \int_{x_0}^{x} \chi_2(v)\,d\,v + \frac{C}{2},\; f_2(x) = \frac{1}{2}\chi_1(x) - \frac{1}{2\sqrt{E}} \int_{x_0}^{x} \chi_2(v)\,d\,v - \frac{C}{2}.$$

С учётом полученных соотношений искомая функция $u(x,t)$ принимает вид

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\chi_1\left(x+\sqrt{E}\,t\right) + \chi_2\left(x-\sqrt{E}\,t\right)\right] + \frac{1}{2\sqrt{E}}\left[\int_{x_0}^{x+\sqrt{E}\,t} \chi_2(v)\,d\,v - \int_{x_0}^{x-\sqrt{E}\,t} \chi_2(v)\,d\,v\right].$$

Пользуясь свойством определённых интегралов, окончательно получаем

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\chi_1\left(x+\sqrt{E}\,t\right) + \chi_2\left(x-\sqrt{E}\,t\right)\right] + \frac{1}{2\sqrt{E}} \int_{x-\sqrt{E}\,t}^{x+\sqrt{E}\,t} \chi_2(v)\,d\,v. \qquad (47)$$

Соотношение (47) называется формулой Даламбера.

3.3. Метод интегральных преобразований

Пусть необходимо определить решение некоторого дифференциального уравнения с заданными начальными и граничными условиями. Решение данной краевой задачи может быть существенно упрощено, если вместо непосредственного определения искомой функции искать её интегральное преобразование, определяемое формулой [19]

$$\bar{u}(\xi, y) = \int_a^b u(x,y)\,K(x,\xi)\,d\,x,$$

где $c \le \xi \le d$, $K(x,\xi)$ – зависящая от вида интегрального преобразования функция, определённая в области $a \le \xi \le b$, $c \le \xi \le d$, называемая ядром интегрального преобразования. Функция $u\,(x,y)$ обычно называется оригиналом, функция $\bar{u}(\xi, y)$ - образом или изображением. Следует заметить, что интегральные преобразования представляют наибольший интерес в том случае, когда коэффициенты решаемого уравнения не зависят от той переменной, по которой берётся преобразование. В противном случае применение интегральных преобразований как правило приводит к математическим трудностям.

Пример 7

В качестве первого примера применения интегрального преобразования рассмотрим применение преобразования Лапласа к параболическому уравнению (18*а*) со следующими граничными и начальным условиями

$$u(0,t)=U,\ \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L}=0,\ u(x=0,0)=U,\ u(x>0,0)=0.$$

Далее применим преобразование Лапласа к правой и левой частям уравнения (18*a*)

$$\int_0^{\infty}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}e^{-st}dt=D\int_0^{\infty}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}e^{-st}dt.$$

Вычисление по частям интеграла в левой части данного уравнения, а также изменение порядка дифференцирования по переменной x и интегрирования по переменной t в правой части данного уравнения приводит к следующему результату

$$s\bar{u}(x,s)-u(x,0)=D\frac{\partial^2\bar{u}(x,s)}{\partial x^2},$$

где $\bar{u}(x,s)=\int_0^{\infty}u(x,t)e^{-st}dt$. Функция $u(x,0)$ равна нулю во всех точках интервала $0<x\le L$. Значение функции $u(0,0)$ может быть учтено в граничном условии. Таким образом, уравнение в частных производных (18*a*) преобразуется к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2\bar{u}(x,s)}{\partial x^2}-\frac{s}{D}\bar{u}(x,s)=0.$$

Лаплас-образ граничных условий для данного уравнения имеет вид

$$\bar{u}(0,s)=\frac{U}{s},\ \left.\frac{\partial\bar{u}(x,s)}{\partial x}\right|_{x=L}=0.$$

Метод Эйлера позволяет получить решение последнего уравнения в виде линейной комбинации экспоненциальных функций с одинаковыми по модулю, но разными по знаку показателями степени:

$$\bar{u}(x,s)=C_1\exp\left(x\sqrt{\frac{s}{D}}\right)+C_2\exp\left(-x\sqrt{\frac{s}{D}}\right). \tag{48}$$

Для определения постоянных интегрирования найдём производную от решения (48) переменной x. В данном случае имеем

$$\frac{d\bar{u}(x,s)}{dx}=C_1\sqrt{\frac{s}{D}}\exp\left(x\sqrt{\frac{s}{D}}\right)-C_2\sqrt{\frac{s}{D}}\exp\left(-x\sqrt{\frac{s}{D}}\right). \tag{49}$$

Далее как в решении (48), так и в его производной (49) выберем соответствующие граничные значения переменной x, т.е.

$$\bar{u}(0,s)=C_1+C_2,\ \left.\frac{d\bar{u}(x,s)}{dx}\right|_{x=L}=C_1\sqrt{\frac{s}{D}}\exp\left(L\sqrt{\frac{s}{D}}\right)-C_2\sqrt{\frac{s}{D}}\exp\left(-L\sqrt{\frac{s}{D}}\right).$$

В результате получим следующую систему уравнений для определения искомых постоянных интегрирования

$$C_1 + C_2 = \frac{U}{s}, \; C_1\sqrt{\frac{s}{D}}\exp\left(L\sqrt{\frac{s}{D}}\right) - C_2\sqrt{\frac{s}{D}}\exp\left(-L\sqrt{\frac{s}{D}}\right) = 0.$$

В результате решения данной системы получаем

$$C_1 = 2\frac{U}{s}\exp\left(-L\sqrt{\frac{s}{D}}\right)\Bigg/ ch\left(L\sqrt{\frac{s}{D}}\right), \; C_2 = 2\frac{U}{s}\exp\left(L\sqrt{\frac{s}{D}}\right)\Bigg/ ch\left(L\sqrt{\frac{s}{D}}\right).$$

В данном соотношении функция $y(x)=ch(x)$ называется гиперболическим косинусом [18]. Эту функцию можно выразить через экспоненциальную $y_1(x) = exp(x)$ следующим образом

$$ch(x)=[exp(x)-exp(-x)]/2.$$

С учётом определённых постоянных интегрирования получаем окончательную форму решения (48)

$$\bar{u}(x,s) = \frac{2U}{s\cdot ch\left(L\sqrt{s/D}\right)}\exp\left(x\sqrt{\frac{s}{D}}\right)\exp\left(-L\sqrt{\frac{s}{D}}\right) +$$

$$+\frac{2U}{s\cdot ch\left(L\sqrt{s/D}\right)}\exp\left(-x\sqrt{\frac{s}{D}}\right)\exp\left(L\sqrt{\frac{s}{D}}\right).$$

После приведения в последнем соотношении (48) подобных членов получаем

$$\bar{u}(x,s) = \frac{2U}{s}\left\{\exp\left[(x-L)\sqrt{\frac{s}{D}}\right] + \exp\left[(L-x)\sqrt{\frac{s}{D}}\right]\right\}\Bigg/ ch\left(L\sqrt{\frac{s}{D}}\right).$$

В окончательном виде Лаплас-образ решения данной краевой задачи имеет вид

$$\bar{u}(x,s) = \frac{U}{s}\frac{ch\left[(L-x)\sqrt{s/D}\right]}{ch\left(L\sqrt{s/D}\right)}. \qquad (48a)$$

Далее с помощью обратного преобразования Лапласа можно найти оригинал функции (48*a*). Для этого необходимо вычислить интеграл

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\bar{u}(x,s)e^{st}ds,$$

где $i=\sqrt{-1}$. Интегрирование происходит в комплексной плоскости $s = \xi + i\eta$ вдоль прямой $\sigma = const$, параллельной мнимой оси. Действительные числа ξ выбираются так, чтобы все особые точки подынтегрального выражения в обратном Лаплас-преобразовании лежали в левой полуплоскости комплексной плоскости. Оригинал для функции (48*a*) можно также определить, пользуясь соответствующими таблицами интегральных преобразований. Воспользовавшись таблицами данных преобразований, можно получить [19]

$$u(x,t)=U,\ u\left(x>0,t\right)=U\left\{1-\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+0{,}5}\exp\left[\frac{\pi^2\left(n+0{,}5\right)^2 Dt}{L^2}\right]\sin\left[\frac{\pi\left(n+0{,}5\right)x}{L}\right]\right\}.$$

<u>Пример 8</u>

В качестве второго примера применения интегрального преобразования рассмотрим применение преобразования Ханкеля к следующему параболическому уравнению

$$\frac{\partial u\left(r,t\right)}{\partial t}=D\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial u\left(r,t\right)}{\partial r}\right]+g\left(r,t\right). \qquad (50)$$

с граничными и начальным условиями

$$u(r,0)=\chi(r),\ \left.\frac{\partial u\left(r,t\right)}{\partial r}\right|_{r=R}=0.$$

Далее применим конечное преобразование Ханкеля к правой и левой частям уравнения (50)

$$\int_0^R r\frac{\partial u\left(r,t\right)}{\partial t}J_0\left(pr\right)dr=D\int_0^R r\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial u\left(r,t\right)}{\partial r}\right]\right\}J_0\left(pr\right)dr+\int_0^R r\,g\left(r,t\right)J_0\left(pr\right)dr.$$

Изменим порядок дифференцирования по переменной *t* и интегрирования по переменной *r*, а также преобразуем первое слагаемое в правой части последнего уравнения

$$\frac{\partial\,\overline{u}\left(p,t\right)}{\partial t}+D\,p^2\overline{u}\left(p,t\right)=\int_0^R r\,g\left(r,t\right)J_0\left(pr\right)dr, \qquad (51)$$

где $\overline{u}\left(p,t\right)=\int_0^R r\,u\left(r,t\right)J_0\left(pr\right)dr$ - прямое конечное преобразование Ханкеля. Обратное конечное преобразование Ханкеля определяется соотношением: $u\left(r,t\right)=$ $=\frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{u}\left(p_n,t\right)\frac{J_0\left(p_n r\right)}{J_0\left(p_n R\right)}+\frac{2}{K}\overline{u}\left(0,t\right)$. Решение уравнения в обыкновенных производных (51) имеет вид

$$\overline{u}\left(p,t\right)=\left[C\left(p\right)+\int_0^t e^{D\tau p^2}\int_0^R r\,g\left(r,t\right)J_0\left(pr\right)dr\,d\tau\right]e^{-Dtp^2}.$$

Для определения неизвестной пока функции *C*(*p*) воспользуемся начальным условием. В данном случае можно записать $\overline{u}\left(p,0\right)=C\left(p\right)$. По определению образа имеем

$$\overline{u}\left(p,0\right)=\int_0^R r\,u\left(r,0\right)J_0\left(pr\right)dr,$$

т.е.

$$\overline{u}(p,0)=\int_0^R r\,\chi(r)J_0(p\,r)d\,r\,.$$

Тогда

$$C(p)=\int_0^R r\,\chi(r)J_0(p\,r)d\,r\,.$$

В окончательной форме решение уравнения (51) имеет вид

$$\overline{u}(p,t)=\left[\int_0^R r\,\chi(r)J_0(p\,r)d\,r+\int_0^t e^{D\tau p^2}\int_0^R r\,g(r,\tau)J_0(p\,r)d\,r\,d\,\tau\right]e^{-D\,t\,p^2}\,.$$

Вычисление оригинала позволяет получить

$$u(r,t)=\frac{2}{R^2}\int_0^R r\,\chi(r)J_0(p\,r)d\,r+\frac{2}{R^2}\int_0^t \exp\left(D\tau\,p^2\right)\int_0^R r\,g(r,t)d\,r\,d\,\tau+\frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-D\,t\,p_n^2}\times$$

$$\times\frac{J_0(p_n r)}{J_0^2(p_n R)}\int_0^R r\,\chi(r)J_0(p_n r)d\,r+\frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-D\,t\,p_n^2}\frac{J_0(p_n r)}{J_0^2(p_n R)}\int_0^t e^{D\tau\,p_n^2}\int_0^R r\,g(r,\tau)J_0(p\,r)d\,r\,d\,\tau\,,$$

где p – корень уравнения $\dfrac{d\,J_0(p\,r)}{d\,r}=0$.

3.4. Решение уравнений в частных производных с переменными коэффициентами

В данном разделе рассмотрим несколько методов решения уравнений в частных производных с переменными коэффициентами, применимых для всех типов уравнений. В качестве примера выберем параболическое уравнение с коэффициентом D, зависящим в общем случае как от переменной x, так и от переменной t, а также от решения уравнения $u(x,t)$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[D(x,t,u(x,t))\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] \qquad (52)$$

со следующими граничными и начальным условиями

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L}=0\,,\ u(x,0)=\chi(x).$$

Уравнение (52) в столь общем случае точного решения не имеет. На следующих примерах проиллюстрируем несколько приближённых методов решения.

<u>Пример 9</u>

В качестве первого примера рассмотрим систему из двух бесконечных цилиндров с коэффициентом $D(r,t)$, принимающим два значения: D_1 при $0\le r\le R_1$ и D_2 при $R_1\le r\le R_2$ для любого значения переменной t (см. рис. 3). Обозначим температуру в каждом цилиндре аналогично $u_1(r,t)$ и $u_2(r,t)$ для $0\le r\le R_1$ и $R_1\le r\le R_2$. Рассмотрим теплообмен данной системы с окружающей средой при условии, что в начальный момент времени ($t=0$) температура в каждом цилиндре постоянна и равна $u_1(r,0)=u_2(r,0)=U_0$. Далее данную систему цилиндров помещают в среду с постоянной температурой U_c. При этом $U_c<U_0$. В данном случае изменение температуры в системе цилиндров описывается следующей системой уравнений

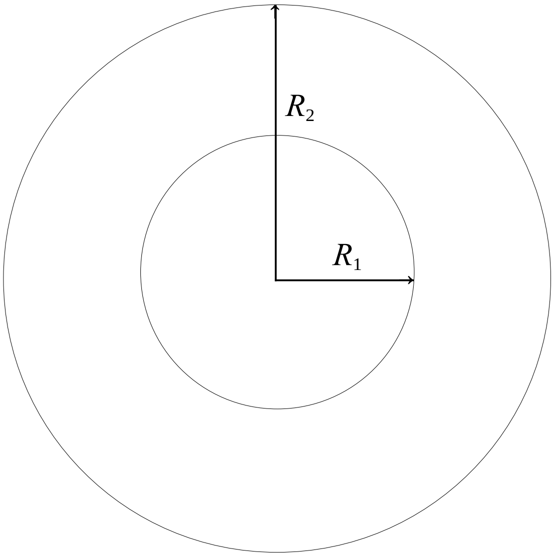

Рис. 3.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T_1(r,t)}{\partial t} = \dfrac{D_1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[r\dfrac{\partial T_1(r,t)}{\partial r}\right], & 0 \le r \le R_1 \\ \dfrac{\partial T_2(r,t)}{\partial t} = \dfrac{D_2}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[r\dfrac{\partial T_2(r,t)}{\partial r}\right], & R_1 \le r \le R_2. \end{cases} \tag{53}$$

со следующими граничными и начальными условиями

$$u_1(r,0)=u_2(r,0)=T_0,\ u_1(R_1,t)=u_2(R_2,t),\ -D_1\left.\frac{\partial u_1(r,t)}{\partial r}\right|_{r=R_1} = -D_2\left.\frac{\partial u_2(r,t)}{\partial r}\right|_{r=R_1},$$

$$u_1(0,t)<\infty,\ -D_2\left.\frac{\partial u_2(r,t)}{\partial r}\right|_{r=R_2} + \alpha\left[U_1 - u_2(R_2,t)\right] = 0.$$

Для нахождения решения системы (53) воспользуемся преобразованием Лапласа. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{D_1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[r\dfrac{\partial Y_1(r,s)}{\partial r}\right] - sY_1(r,s) = -T_0, & 0 \le r \le R_1 \\ \dfrac{D_2}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[r\dfrac{\partial Y_2(r,s)}{\partial r}\right] - sY_2(r,s) = -T_0, & R_1 \le r \le R_2. \end{cases} \tag{53a}$$

$$u_1(0,s)<\infty,\ -D_2\left.\frac{\partial u_2(r,s)}{\partial r}\right|_{r=R_2} + \alpha\left[\frac{U_1}{s} - u_2(R_2,s)\right] = 0,\ u_1(R_1,s)=u_2(R_2,s),$$

$$-D_1\left.\frac{\partial u_1(r,s)}{\partial r}\right|_{r=R_1} = -D_2\left.\frac{\partial u_2(r,s)}{\partial r}\right|_{r=R_1}.$$

Подробно рассматривать решение уравнения (53*a*) и переход от Лаплас-образа к оригиналу не будем из-за большого объёма соотношений. Приведём лишь конечное решение уравнения (53). Оно может быть представлено в следующей форме

$$\begin{cases} u_1(r,t) = U_0 - (U_c - U_0)\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\mu_n \dfrac{r}{R_1}\right)\exp\left(-\dfrac{\mu_n^2 D_1 t}{R_1^2}\right) \\ u_2(r,t) = U_0 - (U_c - U_0)\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(-\dfrac{\mu_n^2 D_2 t}{R_2^2}\right)\left\{J_0(\mu_n)\cos\left[\mu_n\sqrt{\dfrac{D_2}{D_1}}\left(\dfrac{r}{R_1}\right)-1\right] - \right. \\ \left. - J_1(\mu_n)\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\sqrt{\dfrac{D_2}{D_1}}\sin\left[\mu_n\sqrt{\dfrac{D_2}{D_1}}\left(\dfrac{r}{R_1}\right)-1\right]\right\}, \end{cases}$$

где λ_i и D_i – коэффициенты теплопроводности и температуропроводности цилиндров, μ_n – корни уравнения

$$J_0(\mu)\left\{\frac{D_j R_j}{\lambda_j}\cos\left[\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)\right] - \mu\frac{R_2}{R_1}\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\sin\left[\mu\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)\right]\right\} - \tag{54}$$

$$-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\sqrt{\frac{D_2}{D_1}}J_1(\mu)\left\{\frac{D_j R_j}{\lambda_j}\cos\left[\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)\right] + \mu\frac{R_2}{R_1}\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\sin\left[\mu\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)\right]\right\} = 0,$$

$$A_n = 2\frac{\lambda_1 D_j R_j}{\lambda_2 \lambda_j}\sqrt{\frac{D_2}{D_1}}\left\{\mu_n\sqrt{D_1/D_2}\left(1-\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{D_j R_j}{\lambda_j}tg\left[\mu_n\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\left(1-\frac{R_2}{R_1}\right)\right]\right\}\times$$

$$\times\left(\left[\mu_n^2\frac{\lambda_1^2 D_2}{\lambda_2^2 D_1}\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)^2 + \frac{D_j^2 R_j^2}{\lambda_j^2}\right]ctg\left[\mu_n\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\right] - 2\left[\mu_n^2\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)^2\frac{D_1}{D_2} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{D_j^2 R_j^2}{\lambda_j^2}\right]\lambda_1\left(1-\frac{R_2}{R_1}\right)\left\{\lambda_2\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\sin\left[2\mu_n\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)\right]\right\}^{-1} + tg\left[\mu_n\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)\right]\times$$

$$\times\left[\mu_n^2\frac{D_1}{D_2}\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)^2 + 2\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)\frac{\lambda_1 D_i R_i}{\lambda_2 \lambda_i}\sqrt{\frac{D_2}{D_1}} + D_1 D_2\frac{R_i^2}{\lambda_2^2}\right] + 2\mu_n^2\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)^2\frac{\lambda_1}{\lambda_2} -$$

$$\left. - 2\mu_n\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)\frac{D_j R_j}{\lambda_j} - 2\mu_n R_j\frac{D_j\lambda_1^2}{\lambda_j\lambda_2^2}\left(1-\frac{R_2}{R_1}\right) - \sqrt{\frac{D_2}{D_1}}\frac{\lambda_1 D_j^2 R_j^2}{\lambda_2\lambda_j^2\mu_n}\right)^{-1}\times$$

$$\times\left\{\mu_n\sin\left[\mu_n\sqrt{D_1/D_2}\left(1-R_2/R_1\right)\right]\right\}^{-1}, j=1,2.$$

Недостатком данного метода решения является громоздкость преобразований при нахождении решения краевой задачи, необходимость решения трансцендентных уравнений типа уравнений (54) для определения постоянных интегрирования и необходимость не всегда приемлемой идеализации резкой границы между слоями.

<u>Пример 10</u>

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{ D_L(x,t)\left[1+\mu \frac{u^{\gamma}(x,t)}{P^{\gamma}(x,t)}\right]\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right\} \qquad (55)$$

с граничными и начальным условиями

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} = 0\,,\; u(x,0)=\chi(x).$$

В уравнении (55) $D_L(x,t)$, $P(x,t)$ и γ - соответственно известные функции и параметр. Рассмотрим пока простейший случай равенства единице параметра γ. Далее представим функцию $D_L(x,t)$ в виде суммы её среднего значения D_0 и поправочной функции, учитывающей отличие функции $D_L(x,t)$ от её среднего значения, т.е.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D_0 \frac{\partial}{\partial x}\left\{ [1+\varepsilon\, g(x,t)]\left[1+\mu \frac{u^{\gamma}(x,t)}{P^{\gamma}(x,t)}\right]\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right\}, \qquad (55a)$$

где $0\le\varepsilon<1$, $|g(x,t)|\le 1$. Ограниченность по модулю произведения $|\varepsilon\cdot g(x,t)|<1$ является следствием физической реализуемости функции $D_L(x,t)$ (например, положительность коэффициента диффузии или температуропроводности). Далее будем искать решение уравнения (55*a*) в виде степенного ряда [20]

$$u(x,t)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i \sum_{j=0}^{\infty}\mu^j u_{ij}(x,t). \qquad (56)$$

Подстановка предлагаемой формы решения в уравнение (55*a*) и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях параметров ε и μ позволяет получить систему уравнений для функций $u_{ij}(x,t)$

$$\frac{\partial u_{00}(x,t)}{\partial t} = D_0 \frac{\partial^2 u_{00}(x,t)}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial u_{10}(x,t)}{\partial t} = D_0 \frac{\partial^2 u_{10}(x,t)}{\partial x^2} + D_0 \frac{\partial}{\partial x}\left[g(x,t)\frac{\partial u_{00}(x,t)}{\partial x}\right],$$

$$\frac{\partial u_{01}(x,t)}{\partial t} = D_0 \frac{\partial^2 u_{01}(x,t)}{\partial x^2} + D_0 \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u_{00}(x,t)}{P(x,t)}\frac{\partial u_{00}(x,t)}{\partial x}\right], \qquad (57)$$

$$\frac{\partial u_{11}(x,t)}{\partial t} = D_0 \frac{\partial^2 u_{11}(x,t)}{\partial x^2} + D_0 \frac{\partial}{\partial x}\left[g(x,t)\frac{\partial u_{01}(x,t)}{\partial x}\right] + D_0 \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u_{00}(x,t)}{P(x,t)}\frac{\partial u_{10}(x,t)}{\partial x}\right] +$$

$$+ D_0 \frac{\partial^2 u_{11}(x,t)}{\partial x^2} + D_0 \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u_{10}(x,t)}{P(x,t)}\frac{\partial u_{00}(x,t)}{\partial x}\right] + D_0 \frac{\partial}{\partial x}\left[g(x,t)\frac{u_{00}(x,t)}{P(x,t)}\frac{\partial u_{00}(x,t)}{\partial x}\right],$$

$$\frac{\partial u_{20}(x,t)}{\partial t}=D_0\frac{\partial^2 u_{20}(x,t)}{\partial x^2}+D_0\frac{\partial}{\partial x}\left[g(x,t)\frac{\partial u_{10}(x,t)}{\partial x}\right],$$

$$\frac{\partial u_{02}(x,t)}{\partial t}=D_0\frac{\partial^2 u_{02}(x,t)}{\partial x^2}+D_0\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u_{00}(x,t)}{P(x,t)}\frac{\partial u_{01}(x,t)}{\partial x}\right]+D_0\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u_{01}(x,t)}{P(x,t)}\frac{\partial u_{00}(x,t)}{\partial x}\right].$$

Подстановка ряда (56) в граничные и начальное условия для уравнения (55*a*) позволяет получить граничные и начальные условия для системы уравнений (57) в следующем виде

$$\left.\frac{\partial u_{ij}(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial u_{ij}(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L}=0,\ i\ge 0,\ j\ge 0;\ u_{00}(x,0)=\chi(x),\ u_{ij}(x,0)=0,\ i\ge 1,\ j\ge 1.$$

Таким образом, вместо исходного нелинейного уравнения (55) с зависящим от независимых переменных x и t коэффициентом D получена система линейных неоднородных (за исключением уравнения для функции $u_{00}(x,t)$) уравнений с постоянным коэффициентом D. Решая уравнения системы (57) методом разделения переменных, получаем

$$u_{00}(x,t)=\frac{1}{L}\int_0^L\chi(x)\,dx+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 D_0 t}{L^2}\right)\int_0^L\chi(v)\cos\left(\frac{\pi n v}{L}\right)dv,$$

$$u_{10}(x,t)=2\frac{D_0}{L^2}\sum_{m=1}^{\infty}m\cdot\int_0^t\exp\left(\frac{\pi^2 m^2 D_0\tau}{L^2}\right)\int_0^L g(v,\tau)\frac{\partial u_{00}(v,\tau)}{\partial v}\sin\left(\frac{\pi m v}{L}\right)dv\,d\tau\times$$

$$\times\cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right)\cdot\exp\left(-\frac{\pi^2 m^2 D_0 t}{L^2}\right),$$

$$u_{01}(x,t)=2\frac{D_0}{L^2}\sum_{m=1}^{\infty}m\int_0^t\exp\left(\frac{\pi^2 m^2 D_0\tau}{L^2}\right)\int_0^L\frac{u_{00}(v,\tau)}{P(v,\tau)}\frac{\partial u_{00}(v,\tau)}{\partial v}\sin\left(\frac{\pi m v}{L}\right)dv\,d\tau\times$$

$$\times\cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right)\exp\left(-\frac{\pi^2 m^2 D_0 t}{L^2}\right),$$

… … …

Подстановка нулевого приближения в поправочные функции $u_{10}(x,t)$ и $u_{01}(x,t)$ позволяет получить соотношения для них в явном виде

$$u_{10}(x,t)=2\pi\frac{D_0}{L^4}\sum_{m=1}^{\infty}m\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right)\int_0^t\exp\left[\left(m^2-n^2\right)\frac{\pi^2 D_0\tau}{L^2}\right]\int_0^L\cos\left(\frac{\pi n w}{L}\right)\times$$

$$\times\chi(w)\,dw\int_0^L g(v,\tau)\left\{\cos\left[\pi v\frac{m+n}{L}\right]-\cos\left[\pi v\frac{m-n}{L}\right]\right\}dv\,d\tau\cdot\exp\left(-\frac{\pi^2 m^2 D_0 t}{L^2}\right),$$

$$u_{01}(x,t)=2\pi\frac{D_0}{L^4}\sum_{m=1}^{\infty}m\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right)\exp\left(-\frac{\pi^2 m^2 D_0 t}{L^2}\right)\int_0^t\exp\left[\left(m^2-n^2\right)\frac{\pi^2 D_0\tau}{L^2}\right]\times$$

$$\times\int_0^L \frac{1}{P(v,\tau)}\left\{\cos\left[\pi v\frac{m+n}{L}\right]-\cos\left[\pi v\frac{m-n}{L}\right]\right\}\int_0^L \chi(w)\cos\left(\frac{\pi n w}{L}\right)d\,w\left[\int_0^L \chi(w)d\,w+\right.$$

$$\left.+\,2\sum_{k=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{\pi^2k^2D_0\tau}{L^2}\right)\cos\left(\frac{\pi k v}{L}\right)\int_0^L \chi(w)\cos\left(\frac{\pi k w}{L}\right)d\,w\right]d\,v\,d\,\tau\,.$$

Решение следующих уравнений системы (57) позволяет увеличить точность аппроксимации решения уравнения (55). Следует заметить, что положительность коэффициента D в уравнении (55) за счёт физических ограничений, а также способ введения параметра ε и функции $g(x,t)$ приводят к сходимости ряда (56) по параметру ε.

Следует заметить, что методы решения уравнений в частных производных второго порядка могут быть использованы и для решения уравнений в частных производных более высоких порядков.

Раздел 4. Решение интегральных уравнений

4.1. *Метод Бубнова-Галеркина*

Первым рассмотрим метод Бубнова-Галеркина на примере решения уравнения Фредгольма второго рода [15]

$$y(x)= f(x)+ \lambda\int_a^b K(x,t)y(t)dt, \qquad (6б)$$

Выберем систему функций $\{z_n(x)\}$, полную на $[a,b]$ и такую, что при любом n функции $z_1(x)$, $z_2(x)$, …, $z_n(x)$ линейно независимы, и ищем приближенное решение $y_n(x)$ в виде следующего ряда

$$y_n(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i z_i(x). \qquad (58)$$

Коэффициенты a_i (i =1, 2, …, n) определяется путем решения следующей системы уравнений

$$\int_a^b y_n(x)z_i(x)dx=\int_a^b f(x)z_i(x)dx+\lambda\int_a^b z_i(x)\int_a^b K(x,t)y_n(t)dt\,dx,$$

где i=1, 2, …, n, вместо $y_n(x)$ необходимо подставить $\sum_{i=1}^{n} a_i z_i(x)$.

<u>Пример 11</u>

Решим методом Бубнова-Галеркина следующее уравнение

$$y(x)= x+\int_{-1}^{1} xt\,y(t)dt. \qquad (6в)$$

В качестве полной системы функций на [-1,1] выберем систему полиномов Лежандра $P_i(x)$ (i =0, 1, 2, …, n). Приближенное решение $y_n(x)$ уравнения (6*в*) будем искать в виде

$$y_n(x)=a_1\cdot 1+a_2\cdot x+a_3\cdot(3x^2-1)/2.$$

Подставляя $y_3(x)$ вместо $y(x)$ в уравнение (6*в*), получаем

$$a_1+a_2x+a_3\frac{3x^2-1}{2}=x+\int_{-1}^{1} xt\left(a_1+a_2t+a_3\frac{3t^2-1}{2}\right)dt.$$

Вычисление интеграла в правой части данного уравнения позволяет преобразовать его к следующей форме

$$a_1+a_2x+a_3\frac{3x^2-1}{2}=x+a_2x\frac{2}{3}.$$

Умножая обе части данного уравнения последовательно на 1, x и $(3x^2-1)/2$ и интегрируя в пределах от –1 до 1, получаем систему уравнений для определения коэффициентов a_1, a_2 и a_3

$$a_1-a_3/2=0,\ a_2/3=1,\ 3a_3/2=0.$$

Отсюда получаем, что $a_1=0$, $a_2=3$, $a_3=0$. Тогда $y_3(x)=3x$. Подстановка полученного решения в исходное уравнение (6*в*) показывает, что получено точное решение данного уравнения.

4.2. *Метод осреднения функциональных поправок*

Рассмотрим следующее линейное однородное параболическое уравнение с переменным коэффициентом $D(x,t)$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[D(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] \qquad (55б)$$

и следующими граничными и начальным условиями

$$u(x,0)=\chi(x),\ u(0,t)=0,\ \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L}=0.$$

Искомая функция $u(x,t)$ определяется в области G: $0\le x\le L$, $0\le t<\infty$.

Поставим в соответствие дифференциальному уравнению (55*б*) эквивалентное ему интегральное. Для этого проинтегрируем левую и правую часть уравнения (55*б*) по переменной t с учётом начального условия

$$u(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^t D(x,\tau)\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}d\tau\right]+\chi(x).$$

Далее дважды интегрируем полученное уравнение по переменной x. После каждого интегрирования с учётом граничных условий соответственно получаем

$$\int_L^x u(v,t)dv=\int_0^t D(x,\tau)\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}d\tau+\int_L^x \chi(v)dv$$

и

$$\int_0^x\int_L^w u(v,t)dv\,dw=\int_0^t\int_0^x D(v,\tau)\frac{\partial u(v,\tau)}{\partial v}dv\,d\tau+\int_0^x\int_L^w \chi(v)dv\,dw.$$

Интегрирование по частям упрощает последнее уравнение

$$\int_0^x (x-v)u(v,t)dv-x\int_0^L u(v,t)dv-\int_0^t D(x,\tau)u(x,\tau)d\tau=$$

$$=\int_0^x (x-v)\chi(v)dv-x\int_0^L \chi(v)dv. \qquad (59)$$

Данное уравнение является уравнением смешанного типа. Оно имеет слагаемые, соответствующие и уравнению Вальтера, и уравнению Фредгольма первого рода. Далее преобразуем уравнение (59) к следующей форме

$$u(x,t)=u(x,t)+\frac{1}{L^2}\left[\int_0^x (x-v)\chi(v)dv-x\int_0^L \chi(v)dv-\int_0^x (x-v)u(v,t)dv+\right.$$

$$\left.+x\int_0^L u(v,t)dv+\int_0^t D(x,\tau)u(x,\tau)\,d\tau\right]. \qquad (59а)$$

Для нахождения решения данного уравнения заменим искомую функцию $u(x,t)$ на ее пока неизвестное среднее значение α_1 [21,22]. Таким образом, мы получили первое приближение искомой функции $u_1(x,t)$

$$u_1(x,t)=\alpha_1+$$

$$+\frac{1}{L^2}\left[\int_0^x (x-v)\chi(v)\,dv - x\int_0^L \chi(v)\,dv - \alpha_1\frac{x^2}{2} + \alpha_1 x L + \alpha_1\int_0^t D(x,\tau)\,d\tau\right]. \qquad (60)$$

Среднее значение первого приближения искомой функции $u_1(x,t)$ определяется с помощью стандартного соотношения

$$\alpha_1=\frac{1}{\Theta L}\int_0^\Theta\int_0^L u_1(x,t)\,dx\,dt\,, \qquad (61)$$

где Θ - длительность наблюдения за изменением функции $u_1(x,t)$ во времени.

Подстановка функции $u_1(x,t)$ в соотношение (61) позволяет получить уравнение для нахождения среднего значения α_1

$$\int_0^\Theta\int_0^L\int_0^x (x-v)\chi(v)\,dv\,dx\,dt - \int_0^\Theta\int_0^L x\int_0^L \chi(v)\,dv\,dx\,dt - \frac{\alpha_1}{2}\int_0^\Theta\int_0^L x^2\,dx\,dt + \alpha_1 L\int_0^\Theta\int_0^L x\,dx\,dt +$$

$$+\alpha_1\int_0^\Theta\int_0^L\int_0^t D(x,\tau)\,d\tau\,dx\,dt=0\,.$$

Интегрирование по частям, а также табличное интегрирование позволяет упростить данное уравнение

$$\frac{1}{2}\int_0^\Theta\int_0^L (L+x)^2\chi(x)\,dx\,dt - L^2\frac{\Theta}{2}\int_0^L \chi(v)\,dv - \alpha_1 L^3\frac{\Theta}{4} + \alpha_1 L^3\frac{\Theta}{2} +$$

$$+\alpha_1\int_0^\Theta(\Theta-t)\int_0^L D(x,t)\,dx\,dt=0\,.$$

Решение данного уравнения представимо в следующей форме

$$\alpha_1=\left[L^2\frac{\Theta}{2}\int_0^L \chi(v)\,dv - \frac{1}{2}\int_0^\Theta\int_0^L (L+x)^2\chi(x)\,dx\,dt\right]\Bigg/\left[L^3\frac{\Theta}{4} + \int_0^\Theta(\Theta-t)\int_0^L D(x,t)\,dx\,dt\right].$$

Второе приближение искомой функции определим в рамках стандартной процедуры метода осреднения функциональных поправок [21,22], т.е. путем замены искомой функции $u(x,t)$ в правой части уравнения (59*a*) на сумму $\alpha_2+u_1(x,t)$, т.е.

$$u_2(x,t)=\alpha_2+u_1(x,t)+\frac{1}{L^2}\left\{\int_0^x (x-v)\chi(v)\,dv - x\int_0^L \chi(v)\,dv - \int_0^x\left[\alpha_2+u_1(v,t)\right]\times\right.$$

$$\left.\times(x-v)\,dv + x\int_0^L\left[\alpha_2+u_1(v,t)\right]dv + \int_0^t D(x,\tau)\left[\alpha_2+u_1(v,\tau)\right]d\tau\right\}. \qquad (62)$$

Для определения среднего значения α_2 второго приближения искомой функции $u_2(x,t)$ используем стандартное для метода осреднения соотношение [21,22]

$$\alpha_2 = \frac{1}{\Theta L}\int_0^{\Theta}\int_0^{L}\left[u_2(x,t) - u_1(x,t)\right]d\,x\,d\,t\,. \tag{63}$$

Подстановка соотношений (60) и (62) в соотношение (63) позволяет получить уравнение для нахождения среднего значения α_2

$$\int_0^{\Theta}\int_0^{L}\int_0^{x}(x-v)\chi(v)d\,v\,d\,x\,d\,t - \int_0^{\Theta}\int_0^{L}\int_0^{x}(x-v)\left[\alpha_2 + u_1(v,t)\right]d\,v\,d\,x\,d\,t - \int_0^{\Theta}\int_0^{L}\int_0^{L}\chi(v)d\,v\times$$

$$\times\,x\,d\,x\,d\,t + \int_0^{\Theta}\int_0^{L}x\int_0^{L}\left[\alpha_2 + u_1(v,t)\right]d\,v\,d\,x\,d\,t + \int_0^{\Theta}\int_0^{L}\int_0^{t}D(x,\tau)\left[\alpha_2 + u_1(x,\tau)\right]d\,\tau\,d\,x\,d\,t = 0\,.$$

Интегрирование по частям и табличное интегрирование позволяют упростить полученное соотношение

$$\frac{1}{2}\int_0^{\Theta}\int_0^{L}(L+x)^2\chi(x)\,d\,x\,d\,t - \frac{1}{2}\int_0^{\Theta}\int_0^{L}(L+x)^2\left[\alpha_2 + u_1(x,t)\right]d\,x\,d\,t - \Theta\frac{L^2}{2}\int_0^{L}\chi(x)d\,x +$$

$$+\frac{L^2}{2}\int_0^{\Theta}\int_0^{L}\left[\alpha_2 + u_1(x,t)\right]d\,x\,d\,t + \int_0^{\Theta}(\Theta - t)\int_0^{L}D(x,t)\left[\alpha_2 + u_1(x,t)\right]d\,x\,d\,t = 0\,.$$

Решая данное уравнение, получаем среднее значение α_2 второго приближения $u_2(x,t)$ искомой функции $u(x,t)$

$$\alpha_2 = \left[\frac{1}{2}\int_0^{\Theta}\int_0^{L}(L+x)^2u_1(x,t)d\,x\,d\,t + \Theta\frac{L^2}{2}\int_0^{L}\chi(x)d\,x - \frac{1}{2}\int_0^{\Theta}\int_0^{L}(L+x)^2\chi(x)\,d\,x\,d\,t -\right.$$

$$\left.-\frac{L^2}{2}\int_0^{\Theta}\int_0^{L}u_1(x,t)d\,x\,d\,t - \int_0^{\Theta}(\Theta - t)\int_0^{L}D(x,t)u_1(x,t)d\,x\,d\,t\right]\left[\int_0^{\Theta}(\Theta - t)\int_0^{L}D(x,t)d\,x\,d\,t -\right.$$

$$\left.-\,2L^3\Theta/3\right]^{-1}.$$

Приближения $u_n(x,t)$ искомой функции $u(x,t)$ более высокого порядка (n = 3, 4, …) могут быть получены аналогично второму приближению функции $u(x, t)$, т.е. ее заменой за сумму $\alpha_n + u_{n-1}(x,t)$.

Количество итерационных шагов метода осреднения может быть уменьшено при сохранении точности решения уравнения. Для этого выберем более точное исходное приближение. В качестве более точного приближения выберем решение исходной краевой задачи при усредненном коэффициенте $D(x,t)$. Его среднее значение обозначим как D_0. Соответствующее ситуации $D(x,t) = D_0$ решение имеет вид [23]

$$u_0(x,t) = \frac{1}{L}\int_0^{L}\chi(x)d\,x +$$

$$+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)\exp\left(-\frac{\pi^2n^2D_0t}{L^2}\right)\int_0^{L}\chi(v)\cos\left(\frac{\pi\,n\,v}{L}\right)d\,v\,. \tag{64}$$

Подстановка данного приближения в уравнение (59*a*) позволяет получить первое приближение данного уравнения в следующей форме

$$u_1(x,t)=\frac{1}{L}\int_0^L \chi(x)d\,x+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 D_0 t}{L^2}\right)\int_0^L \chi(v)\cos\left(\frac{\pi n v}{L}\right)d\,v+$$

$$+\frac{1}{L^2}\left\{x\int_0^L \chi(x)d\,x+2\frac{x L}{\pi L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 D_0 t}{L^2}\right)\int_0^L \chi(v)\cos\left(\frac{\pi n v}{L}\right)d\,v-\right.$$

$$-\frac{x^2}{2L}\int_0^L \chi(x)d\,x-\frac{2L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 D_0 t}{L^2}\right)\int_0^L \chi(v)\cos\left(\frac{\pi n v}{L}\right)d\,v+$$

$$+\frac{1}{L}\int_0^L \chi(x)d\,x\int_0^t D(x,\tau)d\,\tau+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^t D(x,\tau)\exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 D_0 \tau}{L^2}\right)d\,\tau\times$$

$$\left.\times\int_0^L \chi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)d\,x+\int_0^x (x-v)\chi(v)d\,v-x\int_0^L \chi(v)d\,v\right]. \qquad (65)$$

Приближения более высоких порядков могут быть получены в рамках стандартной итерационный процедуры.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках данного учебного пособия рассмотрен ряд методов решения дифференциальных и интегральных уравнений математической физики. Некоторые из них позволяют решать линейные уравнения с постоянными коэффициентами. Другие из них позволяют решать нелинейные уравнения математической физики с коэффициентами, распределенными как в пространстве, так и во времени. Проведено сравнение нескольких альтернативных методов из второй группы. Обсуждались их достоинства и недостатки. В конце пособия приведен список литературы, в котором рассмотренные здесь методы обсуждаются более подробно.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Найти решения дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

1.01 $\frac{1}{x^5}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{y^7}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{z^4}\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.02 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{ctg(y)}\frac{\partial u}{\partial y}+tg\,(z)\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.03 $\frac{1}{\ln(x)}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{ch(y)}\frac{\partial u}{\partial y}+e^{z}\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.04 $\frac{1}{\sin(x)}\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}+3\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.05 $\frac{1}{\ln(x)}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u}{2\cdot x\cdot y}$;

1.06 $\frac{\ln(x)}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+e^{y}\frac{\partial u}{\partial y}+2z\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.07 $2\frac{\partial u}{\partial x}+ye^{y^2}\frac{\partial u}{\partial y}=2x^2u\cdot tg(y)$;

1.08 $\frac{1}{x^2\ln(x^3)}\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u\cdot th(y)$;

1.09 $x\cdot y^2\frac{\partial u}{\partial x}+x^5\cdot y^3\frac{\partial u}{\partial y}+tg(z)\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.10 $e^{2x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\ln^2(y)}{y}\frac{\partial u}{\partial y}+cth(z)\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.11 $2x\frac{\partial u}{\partial x}+y^2\sin(y)\frac{\partial u}{\partial y}=x\cdot\ln(u)$;

1.12 $\frac{\partial u}{\partial x}+th(y)\frac{\partial u}{\partial y}+cth(z)\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.13 $y\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\ln(1+x^2)}{x}\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.14 $x^3\frac{\partial u}{\partial x}+5y^8\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.15 $\sin^2(x)\frac{\partial u}{\partial x}+\cos^2(y)\frac{\partial u}{\partial y}+3\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.16 $\cos^2(x)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\ln(y)}\frac{\partial u}{\partial y}+sh^2(z)\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.17 $\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{y^2e^{y}}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{z}\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.18 $tg^3(x)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+2z^4\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.19 $\frac{e^{x^3}}{x^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{y^4}{5}\frac{\partial u}{\partial y}=u$;

1.20 $\frac{tg(x)}{\sin(2x)}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{y^3}{\ln(y^{-2})}\frac{\partial u}{\partial y}=2u$;

1.21 $\frac{\cos^2(x)-\sin^2(x)}{\sin(2x)}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{y}{7}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u}{3}$;

1.22 $x\frac{\partial u}{\partial x}+\sin^2(3y)\frac{\partial u}{\partial y}=u$;

1.23 $\frac{x^2}{3}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\cos^2(y^2)}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=u$;

1.24 $tg(x)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\sin(y)}\frac{\partial u}{\partial y}=u$;

1.25 $ctg^3(x)\frac{\partial u}{\partial x}+y^3\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\ln(z)}{z}\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.26 $\frac{1}{\ln(x)}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{e^{y^3}}{y^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\ln^4(z)}{z}\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.27 $tg^5(x)\frac{\partial u}{\partial x}+2y^2\frac{\partial u}{\partial y}+sh^2(z)\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.28 $\frac{1}{x\cdot\ln(x)}\frac{\partial u}{\partial x}+\sqrt{1-y^2}\frac{\partial u}{\partial y}+3\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.29 $\frac{1}{x\cdot\ln(x^2)}\frac{\partial u}{\partial x}+\sqrt{1+y^2}\frac{\partial u}{\partial y}+3z\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.30 $\frac{1}{1+x^2}\frac{\partial u}{\partial x}+(1+y^2)\frac{\partial u}{\partial y}+3z^2\frac{\partial u}{\partial z}=0$.

2. Найти решения дифференциального уравнения $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=D\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}+g(x,t)$

с граничными и начальным условиями $u(x,0)=\chi(x)$, $u(0,t)=0$, $u(L,t)=0$ при

1.01 $\chi(x)=a\cdot x+b$, $g(x,t)=c\cdot x\cdot t$;

1.02 $\chi(x)=a\cdot sin(b\cdot x)$, $g(x,t)=c\cdot x^2\cdot t^2$;

1.03 $\chi(x)=a\cdot x^2+b$, $g(x,t)=c\cdot e^{-b\cdot x\cdot t}$;

1.04 $\chi(x)=a$, $g(x,t)=b\cdot sin(\omega\cdot t)$;

1.05 $\chi(x)=a\ cos(b\cdot x)$, $g(x,t)=c\cdot cos(\omega x)$;

1.06 $\chi(x)=a\cdot e^{-b\cdot x}$, $g(x,t)=c\cdot x\cdot ch(c\cdot t)$;

1.07 $\chi(x)=a\cdot sh(b\cdot x)$, $g(x,t)=c\cdot cos(\omega\cdot t)$;

1.08 $\chi(x)=a\cdot ch(b\cdot x)$, $g(x,t)=c\cdot x^2\cdot t$;

1.09 $\chi(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$, $g(x,t)=d\cdot x\cdot t^2$;

1.10 $\chi(x)=a\cdot x+b$, $g(x,t)=c\cdot x\cdot t$;

1.11 $\chi(x)=a\cdot e^{-b\cdot x}$, $g(x,t)=c\cdot cos(dx+et)$;

1.12 $\chi(x)=a\cdot e^{-b\cdot x}$, $g(x,t)=c\cdot x\cdot sh(c\cdot t)$;

1.13 $\chi(x)=a\cdot x+b$, $g(x,t)=c\cdot e^{-d\cdot x\cdot t}+e$;

1.14 $\chi(x)=a\cdot sh(b\cdot x)$, $g(x,t)=c\cdot cos(dx+et)$;

1.15 $\chi(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$, $g(x,t)=c\cdot cos(dx)$;

1.16 $\chi(x)=a$, $g(x,t)=b\cdot cos(c\,x)$;

1.17 $\chi(x)=a\cdot e^{-b\cdot x}$, $g(x,t)=c$;

1.18 $\chi(x)=a\cdot ch(b\cdot x)$, $g(x,t)=c\cdot sin(d\,t)$;

1.19 $\chi(x)=a\ cos(b\cdot x+c)$, $g(x,t)=c\cdot e^{-d\cdot x}cos(e\,t)$;

1.20 $\chi(x)=a\ sin(b\cdot x+c)$, $g(x,t)=c\cdot e^{-d\cdot x}sin(d\,t)$;

1.21 $\chi(x)=a$, $g(x,t)=c\cdot e^{-b\cdot x\cdot t}$;

1.22 $\chi(x)=a\cdot e^{-b\cdot x}$, $g(x,t)=c\cdot x^2\cdot t^3$;

1.23 $\chi(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$, $g(x,t)=c\cdot x^3\cdot t^2$;

1.24 $\chi(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$, $g(x,t)=c\cdot x^3\cdot t^2$;

1.25 $\chi(x)=a\cdot e^{-b\cdot x}$, $g(x,t)=c\cdot e^{-d\cdot x}$;

1.26 $\chi(x)=a\cdot sh(b\cdot x)$, $g(x,t)=c\cdot e^{-d\cdot x\cdot t}$;

1.27 $\chi(x)=a\cdot ch(b\cdot x)$, $g(x,t)=c\cdot e^{-d\cdot t}$;

1.28 $\chi(x)=a$, $g(x,t)=b\cdot e^{-c\cdot x}cos(d\,t)$;

1.29 $\chi(x)=a$, $g(x,t)=b\cdot e^{-c\cdot x}sin(d\,t)$;

1.30 $\chi(x)=a\cdot cos(b\,x)$, $g(x,t)=b\cdot sh(d\,t)$;

Параметры a, b, c, d и e считать постоянными.

3. Найти решения дифференциального уравнения $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+g(x,t)$ с граничными и начальным условиями $\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L}=0$, $u(x,0)=\chi_1(x)$, $\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{x=0}=\chi_2(x)$. В качестве функции $g(x,t)$ взять функцию $g(x,t)$ из предыдущего задания, а функции $\chi_1(x)$ и $\chi_2(x)$ считать одинаковыми и равными функции $\chi(x)$ из предыдущего задания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. З.Ю. Готра. Справочник. Технология микроэлектронных устройств. – М.: Радио и связь, 1991. – 528 с.
2. В.Г. Гусев, Ю.М. Гусев. Электроника. - М.: Высшая школа, 1991. – 622 с.
3. Н.М. Тугов, Б.А. Глебов, Н.А. Чарыков.. Полупроводниковые приборы. - М.: Энергоатомиздат, 1990. – 576 с.
4. И.П. Степаненко. Основы микроэлектроники. - М.: Советское радио, 1980. – 423 с.
5. В.С. Вавилов, Н.П. Кекеладзе, Л.С. Смирнов. Действие излучения на полупроводники. - М.: Наука, 1988. – 191с.
6. В.И. Лачин, Н.С. Савелов. Электроника. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2001. – 446 с.
7. К.В. Шалимова. Физика полупроводников. - М.: Энергоатомиздат, 1985. – 391 с.
8. В.В. Молодин. Зимнее бетонирование монолитных строительных конструкций (учебное пособие). - Новосибирск: Новосибирский архитектурно-строительный университет, 2007. – 184 с.
9. В.В. Молодин, Ю.В. Лунев. Зимнее бетонирование монолитных строительных конструкций (монография). - Новосибирск: Новосибирский архитектурно-строительный университет, 2006. – 300 с.
10. М.С. Седов. Теория инерционного прохождения звука через ограждающие конструкции. // Известия вузов. Строительство и архитектура. - 1990. - № 2. С. 37-42.
11. М.С. Седов. Звуковая теория зданий и сооружений. // Известия вузов. Строительство. - 1997. - № 8. С. 19-23.
12. М.С.Бибишкин, Ю.А. Вайнер, А.Я. Лопатин, В.И. Лучин, А. Е. Пестов, В.Н. Полковников, Н.Н. Салащенко, В.В.Чернов, Н.И. Чхало. Многослойные поляризаторы для мягкого рентгеновского диапазона длин волн. // Материалы Симпозиума “Нанофизика и наноэлектроника” / Нижний Новгород, ИФМ РАН. –2005. - С. 493 -494.
13. М.С. Бибишкин, С.Ю. Зуев, А.Ю. Климов, Е.Б. Клюенков, А.Я Лопатин, В.И. Лучин, Н.Н. Салащенко, Л.А. Суслов, Н.Н. Цыбин, Н.И. Чхало, Л.А. Шмаенок. Фильтры на пропускание для стендов проекционной EUV-литографии. // Материалы Симпозиума “Нанофизика и наноэлектроника”/ Нижний Новгород, ИФМ РАН. –2005. - С. 497 -498.
14. А.В. Митрофанов, Ф.А. Пудонин. Рентгеновские фильтры из тонких пленок циркония и оксида циркония. // Материалы Симпозиума “Нанофизика и наноэлектроника”/ Нижний Новгород, ИФМ РАН. – 2005. - С. 501-503.
15. М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. Интегральные уравнения. – М.: Наука, 1976. - 215 с.
16. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М.: Наука, 1974. – 831 с.
17. Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. -

М.: Наука, 1971. - 576 с.
18. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1972. – 735 с.
19. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, В. Магнус, Ф. Оберхеттингер, Ф. Трикоми. Таблицы интегральных преобразований. Т.1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. - М.: Наука, 1969. - 343 с.
20. E.L. Pankratov. Influence of spatial, temporal and concentrational dependence of diffusion coefficient on dopant dynamics: Optimization of annealing time. // Physical Review B. - 2005. - Vol. 72, №7. - P. 075201-075208.
21. Ю.Д. Соколов. Об определении динамических усилий в шахтных подъёмных канатах. // Прикладная механика. - 1955. - Т.1, №1. С. 23-35.
22. А.Ю. Лучка. Теория и применение метода осреднения функциональных поправок. – Киев: Издательство АН УССР. 1963. – 128 с.
23. E.L. Pankratov. Dynamics of delta-dopant redistribution during growth of heterostructure. // The European Physical Journal B. - 2007. – Vol. 57, № 3. P 251-256.

Содержание